Programme de colle n°27
(27 au 31 mai)

Matrices d'une application linéaire

- Matrice d'une application linéaire, d'un vecteur
- Endomorphismes, isomorphismes et matrices de changement de bases.

Probabilité

- Probabilité sur un univers fini, espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$
- Probabilité conditionnelle
- Evènements indépendants

Démo de cours

Propriété (Formule des probabilités totales) I.c.1: Soit $A_1, \dots, A_n$ une partition de l'univers d'une expérience aléatoire. Soit B un évènement de cette expérience. On a alors :

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \cdots + P(B \cap A_n)$$

Propriété II.a.1 : On a les équivalences suivantes :

$$A \coprod B \Leftrightarrow A \coprod \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \coprod B \Leftrightarrow \bar{A} \coprod \bar{B}$$

Application II.c.3 : on pose :

$$M(a_0, a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & \dots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \dots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$M(a_0, a_1, \dots, a_n) \in GL_{n+1}(\mathbb{K}) \Leftrightarrow a_0, a_1, \dots, a_n \text{ sont deux à deux distincts}$$

Exercices de cours

_ Savoir écrire la matrice d'une application linéaire dans une base donnée
_ Savoir écrire une application linéaire lorsque l'on connait sa matrice dans une base donnée.

Exercice A.4 : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer l'expression de f.
2) Calculer f^2. En déduire que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
3) Déterminer $\mathrm{rg}(f)$ et $\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big)$ puis en déduire une base du noyau et de l'image de f.
4) Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ telle que :

$$\mathrm{mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Application I.a.2 : On pose :

$$M = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \dots & \binom{n}{1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$$

a) Déterminer l'application linéaire $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\mathrm{mat}_{B_c}(\varphi) = M$
b) Déterminer M^{-1}.