Correction DM n°8
Mardi 28 mai 2021

Problème 1 : Algèbre

Partie A : Etude de deux applications

La notation $\mathbb{R}_2[X]$ désigne le $\mathbb{R}$ −espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieurs ou égaux à 2. On identifiera dans la suite de ce problème les éléments de $\mathbb{R}_2[X]$ et leurs fonctions polynomiales associées. On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
On définit les deux applications suivantes :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X] \\ P \mapsto \frac{1}{2}\left(P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right) \end{cases}$$

$$\phi: \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R} \\ P \mapsto P(1) \end{cases}$$

1) Vérifier que f est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$ et montrer que f est linéaire.
2) Ecrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$ en indiquant les calculs intermédiaires.
3) f est-elle injective ? Surjective ?
4) Montrer que ϕ est linéaire.
5) Déterminer la dimension et une base de $\ker(\phi)$.
6) ϕ est-elle injective ? Surjective ?

Partie B : Calcul des puissances successives d'une matrice

On note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et A la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

On note enfin $\mathcal{B}'$ la famille de $\mathbb{R}_2[X]$ définie par :

$$\mathcal{B}' = (1, -2X + 1, 6X^2 - 6X + 1)$$

1) Démontrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2) Ecrire la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, noté $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = P$.
3) Justifier que P est inversible et calculer son inverse.
4) Ecrire la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}'$ en donnant les calculs intermédiaires.
5) Calculer M^n pour tout entier naturel n.
6) Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PM^nP^{-1}$$

7) On pose $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$. Déterminer $f^n(P)$ en fonction de a_0, a_1, a_2.
8) Montrer que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \lim_n \phi\big(f^n(P)\big) = \int_0^1 P(t)dt$$

Partie C : Une autre preuve du résultat précédent

1) A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \forall n \in \mathbb{N}^*, f^n(P) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{n}\right)$$

2) En déduire à l'aide d'un résultat du cours que l'on énoncera avec précision que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \lim_n \phi\big(f^n(P)\big) = \int_0^1 P(t)dt$$

Partie D : Une fonction complexe

On pose :

$$g:\begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \dfrac{z+|z|}{2} \end{cases}$$

De plus on pose la suite définie par :

$$\begin{cases} z_0 \in \mathbb{C}\backslash(]-\infty;0]) \\ \forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = g(z_n) \end{cases}$$

1) g est-elle linéaire ?

2) On pose pour tout entier naturel n, $r_n = |z_n|$ et $\theta_n = \arg(z_n)\,, avec\ \theta_n \in]-\pi;\pi]$.
 a) Exprimer $\mathrm{r}_{\mathrm{n}+1}$ en $\theta_{\mathrm{n}+1}$ en fonction de r_n et de θ_n.
 b) En déduire la valeur de $\lim\limits_{\mathrm{n}} \theta_\mathrm{n}$.

3) a) Etudier la suite définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n = r_n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\ avec\ \theta = \arg(z_0) \in]-\pi;\pi]$$

 b) En déduire la limite de r_n puis celle de z_n.

Partie A : Etude de deux applications

1) On a :

$$P \in \mathbb{R}_2[X] \Leftrightarrow \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^2, P(X) = aX^2 + bX + c$$

On a alors :

$$\begin{aligned} f(P) = f(aX^2+bX+c) &= \frac{1}{2}\left(a\left(\frac{X}{2}\right)^2 + b\frac{X}{2} + c\right) + \frac{1}{2}\left(a\left(\frac{X+1}{2}\right)^2 + b\frac{X+1}{2} + c\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}X^2 + \left(\frac{a}{2}+b\right)X + \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + 2c\right) \\ &= \frac{a}{4}X^2 + \frac{(b+a)}{4}X + \frac{a+2b+8c}{8} \in \mathbb{R}_2[X] \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$$

De plus on a :

$$\begin{aligned} \forall (P,Q) \in (\mathbb{R}_2[X])^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda P + Q) &= \frac{1}{2}\left((\lambda P + Q)\left(\frac{X}{2}\right) + (\lambda P + Q)\left(\frac{X+1}{2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\lambda P\left(\frac{X}{2}\right) + Q\left(\frac{X}{2}\right) + \lambda P\left(\frac{X+1}{2}\right) + Q\left(\frac{X+1}{2}\right)\right) \\ &= \lambda\left[\frac{1}{2}\left(P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right)\right] + \frac{1}{2}\left(Q\left(\frac{X}{2}\right) + Q\left(\frac{X+1}{2}\right)\right) \\ &= \lambda f(P) + f(Q) \end{aligned}$$

Donc $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$

2) On a :

$$f(1) = \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

$$f(X) = \frac{1}{2}\left(\frac{X}{2} + \frac{X+1}{2}\right) = \frac{1}{2}X + \frac{1}{4}$$

$$f(X^2) = \frac{1}{2}\left(\frac{X^2}{4} + \frac{X^2}{4} + \frac{1}{2}X + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{4}X + \frac{1}{8}$$

Ainsi la matrice de f dans la base canonique est :

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = A$$

3) On voit que $Mat_{\mathcal{B}}(f)$ a trois pivots donc elle est inversible. Ainsi f est bijective donc injective et surjective.
4) On a :

$$\forall (P,Q) \in (\mathbb{R}_2[X])^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \phi(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(1) = \lambda P(1) + Q(1) = \lambda \phi(P) + \phi(Q)$$

Donc $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R})$. ϕ est une forme linéaire.
5) On sait que :

$$Im(\phi) \subset \mathbb{R} \Longrightarrow \dim\big(Im(\phi)\big) = rg(\phi) \in \{0;1\}$$

De plus on sait que :

$$\phi(X) = 1 \Longrightarrow \phi \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X],\mathbb{R})} \Longrightarrow rg(\phi) \geq 1 \Longrightarrow rg(\phi) = 1$$

On utilise ensuite le théorème du rang :

$$\dim(ker(\phi)) = \dim(\mathbb{R}_2[X]) - rg(\phi) = 3 - 1 = 2$$

On en déduit donc que :

$$\dim(ker(\phi)) = 2$$

De plus on sait que :

$$P \in \ker(\phi) \Leftrightarrow \phi(P) = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \Leftrightarrow P(1) = 0 \Leftrightarrow (X-1)|P$$

On pose :

$$\mathcal{F} = \{X-1, X^2 - X\}$$

i) $\mathcal{F}$ est libre car c'est une famille de polynômes échelonnés.
ii) $\#\mathcal{F} = 2 = \dim(ker(\phi))$
Donc c'est une base de $ker(\phi)$.

Ainsi on a :

$$\ker(\phi) = \{(X-1)Q(X), \deg(Q) \leq 1\} = vect(X-1, X^2 - X)$$

Remarque : On peut aussi voir que :

$$\ker(\phi) = \{P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2, P(1) = 0\} = \{P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2, a_0 + a_1 + a_2 = 0\}$$

6) On a $\phi\big(0_{\mathbb{R}_2[X]}\big) = \phi(X-1)$ donc ϕ n'est pas injective.
On a :

$$\forall a \in \mathbb{R}, a = \phi(a) \Longrightarrow \phi \text{ } est \text{ } surjective$$

Remarque : On peut aussi dire que $Im(\phi) = \mathbb{R}$ donc ϕ est surjective.

Partie B : Calcul des puissances successives d'une matrice

1) $i)$ $\mathcal{B}'$ est libre car c'est une famille de polynômes échelonnés.
$ii)$ $\#\mathcal{B}' = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$
Donc $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2) On a :

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

3) P est inversible car c'est une matrice de passage (mais sinon on peut voir directement qu'elle a 3 pivots).
Pour l'inverser on peut soit utiliser l'algorithme de Gauss-Jordan, soit écrire les vecteurs de la base canonique dans la base $\mathcal{B}'$.

$$X = -\frac{1}{2}(-2X+1) + \frac{1}{2}$$

$$X^2 = \frac{1}{6}(6X^2 - 6X + 1) - \frac{1}{2}(-2X+1) + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}(6X^2 - 6X + 1) - \frac{1}{2}(-2X+1) + \frac{1}{3}$$

On en déduit donc que :

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & \frac{1}{6}\end{pmatrix}$$

Remarque : On peut vérifier par le calcul :

$$P\times P^{-1}=I_3$$

4) On a :

$$\begin{cases} f(1)=1\\ f(-2X+1)=\frac{1}{2}\left(\left(-2\frac{X}{2}+1\right)+\left(-2\frac{X+1}{2}+1\right)\right)=\frac{1}{2}(-2X+1)\\ f(6X^2-6X+1)=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{6X^2}{4}-\frac{6X}{2}+1\right)+\left(6\left(\frac{X+1}{2}\right)^2-6\left(\frac{X+1}{2}\right)+1\right)\right)=\frac{1}{4}(6X^2-6X+1)\end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$Mat_{B'}(f)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{4}\end{pmatrix}=M$$

5) Par une récurrence immédiate on a :

$$\forall n\in\mathbb{N}, M^n=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0\\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n\end{pmatrix}$$

6) On pose :

$$\forall n\in\mathcal{P}(n): A^n=PM^nP^{-1}$$

Initialisation : $n=0$

On a :

$$A^0=I_3$$
$$PM^0P^{-1}=PI_3P^{-1}=PP^{-1}=I_3$$

On en déduit que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel n fixé. On suppose vraie $\mathcal{P}(n)$. On a alors :

$$A^n=PM^nP^{-1}$$

On en déduit donc que :

$$A^{n+1}=A^nA=PM^nP^{-1}\times A$$

Or on a :

$$PMP^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & -6\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & \frac{1}{6}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8}\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ 0 & 0 & \frac{1}{4}\end{pmatrix}=A$$

On a donc :

$$A^{n+1}=PM^nP^{-1}\times PMP^{-1}=PM^nI_3MP^{-1}=PM^{n+1}P^{-1}$$

On en déduit donc que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : On conclut d'après le principe de récurrence.

7) On a :

$$mat_B(f^n) = mat_B(f)^n = A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

On calcule :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} & \frac{1}{3} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3 \times 2^{2n+1}} \\ 0 & \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{2n}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2^{2n}} \end{pmatrix}$$

On en déduit donc que :

$$f^n(a_0 + a_1X + a_2X^2) = a_0 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)a_1 + \frac{1}{2^n}a_1X + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3 \times 2^{2n+1}}\right)a_2 + \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{2n}}\right)a_2X + \frac{1}{2^{2n}}a_2X^2$$

8) On en déduit donc que :

$$\lim_n \phi\big(f^n(P)\big) = a_0 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)a_1 + \frac{1}{2^n}a_1 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3 \times 2^{2n+1}}\right)a_2 + \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{2n}}\right)a_2 + \frac{1}{2^{2n}}a_2$$

$$\Longrightarrow \lim_n \phi\big(f^n(P)\big) = a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{1}{3}a_2$$

De plus on a :

$$\int_0^1 P(t)dt = \int_0^1 (a_0 + a_1t + a_2t^2)dt = a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{1}{3}a_2$$

On en déduit donc que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \lim_n \phi\big(f^n(P)\big) = \int_0^1 P(t)dt$$

Partie C : Une autre preuve du résultat précédent

1) On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n): "\forall P \in \mathbb{R}_2[X], f^n(P) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right)"$$

Initialisation : $n = 1$

On a :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], f^1(P) = \frac{1}{2}\left(P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right)$$

$$\frac{1}{2^1}\sum_{k=0}^{2^1-1} P\left(\frac{X+k}{n}\right) = \frac{1}{2}\left(P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right)$$

Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel n non nul. On suppose que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], f^n(P) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right)$$

On a alors :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], f^{n+1}(P) = f\big(f^n(P)\big) = \frac{1}{2}\left(f^n(P)\left(\frac{X}{2}\right) + f^n(P)\left(\frac{X+1}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} \left(\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{\frac{X}{2}+k}{2^n}\right) + \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{\frac{X+1}{2}+k}{2^n}\right) \right)$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} \left(\underbrace{\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+2k}{2^{n+1}}\right)}_{\substack{\text{Somme des pairs de} \\ 0 \text{ à } 2(2^n-1)=2^{n+1}-2}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+2k+1}{2^{n+1}}\right)}_{\substack{\text{Somme des impairs de} \\ 0 \text{ à } 2(2^n-1)+1=2^{n+1}-1}} \right)$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} P\left(\frac{X+k}{2^{n+1}}\right)$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : On conclut d'après le principe de récurrence.

2) On utilise le résultat sur les sommes de Riemann :

Soit f une fonction définie sur un intervalle [a; b]. On a alors le théorème suivant :

Théorème (Méthode des rectangles à droite) : Si f est continue sur [a; b] alors :

$$\lim_{n} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)dt$$

Ici on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \phi(f^n(P)) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{1+k}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} P\left(\frac{k}{2^n}\right)$$

On l'utilise ici en posant $N = 2^n, a = 0 \ et \ b = 1$, car $\forall P \in \mathbb{R}_2[X], P$ est continue.

On en déduit donc que :

$$\lim_{n} \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} P\left(\frac{k}{2^n}\right) = \int_0^1 P(t)dt$$

$$\Longrightarrow \forall P \in \mathbb{R}_2[X], \lim_{n} \phi(f^n(P)) = \int_0^1 P(t)dt$$

Partie D : Une fonction complexe

1) g n'est pas linéaire car :

$$g(1) = 1, g(i) = \frac{1+i}{2} \ et \ g(1+i) = \frac{1+\sqrt{2}+i}{2} \neq g(1) + g(i)$$

2) a) On a par récurrence immédiate :

$$\forall n \in \mathbb{N}, z_n \neq 0$$

On pose alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, z_n = r_n e^{i\theta_n}$$

On a alors :

$$z_{n+1} = \frac{r_n e^{i\theta_n} + r_n}{2} = \frac{r_n}{2}\left(1 + e^{i\theta_n}\right) = r_n \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) e^{\frac{i\theta_n}{2}}$$

On va montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{\theta_n}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$$

Initialisation : $n = 0$

On sait que $\theta \in]-\pi; \pi[\Longrightarrow \frac{\theta_0}{2} = \frac{\theta}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

Hérédité : Soit n un entier naturel fixé. On suppose que $\frac{\theta_n}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = r_n \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) e^{\frac{i\theta_n}{2}} \Longrightarrow r_n \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) > 0 \text{ car } \frac{\theta_n}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$$

On en déduit donc que :

$$z_{n+1} = r_n \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) e^{\frac{i\theta_n}{2}} = r_{n+1} e^{i\theta_{n+1}} \text{ avec } \theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$$

On en déduit donc que la proposition est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour n=0 et est héréditaire, on en déduit alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = r_{n+1} e^{i\theta_{n+1}} \text{ avec } r_{n+1} = r_n \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \text{ et } \theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}$$

b) La suite (θ_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$, on en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \theta_n = \frac{\theta_0}{2^n} \Longrightarrow \lim_n \theta_n = 0 \text{ car } \frac{1}{2} \in]-1; 1[$$

3) a) On sait que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = r_{n+1} \sin\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) = r_n \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$$

Or on sait que :

$$\sin\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) = \sin\left(\frac{1}{2} \times \frac{\theta}{2^n}\right) = \sin\left(\frac{1}{2} \times \theta_n\right)$$

On en déduit donc que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = r_n \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \sin\left(\frac{1}{2} \times \theta_n\right) = \frac{r_n}{2} \times \sin(\theta_n) = \frac{r_n}{2} \times \sin\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) = \frac{u_n}{2}$$

On en déduit donc que la suite (u_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$. On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{2^n} \times r_0 \sin(\theta_0) = r_n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$$

b) On sait que :

$$\frac{1}{2^n} \times r_0 \sin(\theta_0) = r_n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, r_n = \frac{1}{2^n} \times \frac{r_0 \sin(\theta_0)}{\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}$$

De plus on sait que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} = \frac{1}{\theta} \lim_{X \to 0} \frac{X}{\sin(X)} = \frac{1}{\theta} \quad (\text{si } \theta \neq 0)$$

On en déduit donc que :

$$\lim_n z_n = \frac{r_0 \sin(\theta_0)}{\theta_0} \text{ si } \theta \neq 0$$

Si $\theta = 0 \Longrightarrow z_0 \in \mathbb{R}^{+*} \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, z_n = z_0$ par une récurrence immédiate !