Colle n°29
(Du 10 au 14 juin)

Déterminant

- Déterminant d'une famille de vecteurs
- Déterminant d'une matrice carrée
- Déterminant d'un endomorphisme

Variables aléatoires

- Définition
- Lois uniforme, binomiale, Bernoulli
- Lois conjointe et marginales d'un couple $X\ et\ Y$
- Indépendance de deux variables aléatoires

Démo de cours

Propriété (Formule des probabilités totales) I.c.1: Soit $\mathrm{A_1, \dots, A_n}$ une partition de l´univers d´une expérience aléatoire. Soit B un évènement de cette expérience. On a alors :

$$\mathrm{P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_n)}$$

Propriété II.a.1 : On a les équivalences suivantes :

$$A \coprod B \Leftrightarrow A \coprod \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \coprod B \Leftrightarrow \bar{A} \coprod \bar{B}$$

Propriété I.b.1 (Opérations sur le déteminant) : On a :

1) Si $(f_1, \dots, , f_n) = \mathcal{F}$ contient O_E alors son déterminant est nul.

$$O_E \in \mathcal{F} \Longrightarrow det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = 0$$

2) Si on échange deux vecteurs, le déterminant change de signe :

$$det_{\mathcal{B}}\left((f_1, \dots \boldsymbol{f_i}, \dots, \boldsymbol{f_j}, \dots, f_n)\right) = -det_{\mathcal{B}}\left((f_1, \dots \boldsymbol{f_j}, \dots, \boldsymbol{f_i}, \dots, f_n)\right)$$

3) Les transvections ne changent pas le déterminant :

$$det_{\mathcal{B}}\left((f_1, \dots \boldsymbol{f_i + \lambda f_j}, \dots, \boldsymbol{f_j}, \dots, f_n)\right) = det_{\mathcal{B}}\left((f_1, \dots \boldsymbol{f_i}, \dots, \boldsymbol{f_j}, \dots, f_n)\right)\ (i \neq j)$$

Exercices types

Exercice 12 (Déterminant de Vandermonde) : Montrer que :

$$\begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \dots & t_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \dots & t_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (t_j - t_i)$$

Exercice 7 : Soit $(\mathrm{a_1, \dots, a_n}) \in \mathbb{R}^n, n \geq 3$. Montrer que :

$$\begin{vmatrix} \cos(a_1 + a_1) & \cos(a_1 + a_2) & \dots & \cos(a_1 + a_n) \\ \cos(a_2 + a_1) & \cos(a_2 + a_2) & \dots & \cos(a_2 + a_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos(a_n + a_1) & \cos(a_n + a_2) & & \cos(a_n + a_n) \end{vmatrix} = 0$$

Application II.c.3 : Calculer le déterminant suivant :

$$\mathrm{d_n} = \begin{vmatrix} a & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & a & & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & a & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & a \end{vmatrix}$$