Chapitre 29 : Produit scalaire et espace euclidien
Partie A : Présentation

Dans tout ce chapitre E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, non nécessairement de dimension finie.

I) Un produit scalaire généralisé

a) Un peu de vocabulaire

Définition : Soit $\Phi: E \times E \to \mathbb{R}$. On dit que Φ est symétrique si et seulement si :
$$\forall (x,y) \in E^2, \Phi(x,y) = \Phi(y,x)$$

Exemple I.a.1 : Déterminer une application symétrique de $\mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}$ et une non symétrique.

Définition : Soit $\Phi: E \times E \to \mathbb{R}$. On dit que Φ est :

- Linéaire à droite si et seulement si :
$$\forall y \in E, x \mapsto \Phi(x,y) \in \mathcal{L}(E)$$
- Linéaire à gauche si et seulement si :
$$\forall x \in E, y \mapsto \Phi(x,y) \in \mathcal{L}(E)$$

Si Φ vérifie la linéarité à droite et à gauche, on dit que Φ est bilinéaire.

Exemple I.a.2 : Déterminer une application bilinéaire de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \times \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

Définition : Soit $\Phi: E \times E \to \mathbb{R}$. On dit que Φ est définie positive si et seulement si :
$$\forall x \in E, \Phi(x,x) \geq 0 \text{ (Positive)}$$
$$\Phi(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (définie)}$$

Exemple I.a.3 : Déterminer une application définie positive de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$.

b) Le produit scalaire

Définition : On appelle produit scalaire sur E, toute forme bilinéaire symétrique définie positive $\Phi: E \times E \to \mathbb{R}$. On note alors :
$$\forall (x,y) \in E^2, \Phi(x,y) = \langle x,y \rangle = (x|y) = x.y$$

Exemple I.b.1 : Démontrer que :
$$\Phi: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) \mapsto x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \end{cases}$$
Est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.

Exemple I.b.2 : Démontrer que :
$$\Phi: \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R} \\ (P,Q) \mapsto \displaystyle\sum_{i=0}^{n} P(i)Q(i) \end{cases}$$
Est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Exemple I.b.3 : Démontrer que :

$$\Phi : \begin{cases} \mathcal{C}^0([0,1]) \times \mathcal{C}^0([0,1]) \to \mathbb{R} \\ (f,g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)dt \end{cases}$$

Est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

c) Espaces euclidien et préhilbertien

Définition : Un E $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $<.,.>$ est appelé un espace préhilbertien réel, on note alors $(E, <.,.>)$.
Si E est de dimension finie, on dit que $(E, <.,.>)$ est un espace euclidien.

Application I.c.1 : Donner un espace préhilbertien réel est un espace euclidien.

II) Norme euclidienne

a) Une définition généralisée

Définition : Soit $(E, <.,.>)$ un espace préhilbertien réel et $e \in E$ un élément de E. On appelle norme euclidienne de e, notée $\|e\|$, le réel :

$$\|e\| = \sqrt{< e, e >}$$

Exemple II.a.1 : On pose :

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R} \\ (P,Q) \mapsto \sum_{i=0}^{2} P(i)Q(i) \end{cases}$$

Calculer $\|X^2 - 3X + 1\|$.

Exemple II.a.2 : On pose :

$$\Phi : \begin{cases} \mathcal{C}^0\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) \times \mathcal{C}^0\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) \to \mathbb{R} \\ (f,g) \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)g(t)dt \end{cases}$$

Calculer $\|\cos^3\|$.

Propriété II.a.3 : On a :
$(1) \|e\| = 0 \Leftrightarrow e = 0_E$
$(2)\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall e \in E, \|\lambda e\| = |\lambda| \|e\|$

b) Distance euclidienne

Définition : Soit $(E, <.,.>)$ un espace préhilbertien réel et $(e_1, e_2) \in E^2$ deux éléments de E. On appelle distance de e_1 à e_2, notée $d(e_1, e_2)$, le réel $\|e_1 - e_2\|$:

$$\forall (e_1, e_2) \in E^2, d(e_1, e_2) = \|e_1 - e_2\|$$

Exemple II.b.1 : On pose :

$$\Phi:\begin{cases}\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\times\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\to\mathbb{R}\\(M,N)\mapsto \mathrm{Tr}(\,{}^tM\times N)\end{cases}$$

Montrer que Φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et déterminer $d(M_1,M_2)$ avec :

$$M_1=\begin{pmatrix}1&3\\5&8\end{pmatrix}\text{ et }M_2=\begin{pmatrix}-2&6\\1&0\end{pmatrix}$$

c) Identités remarquables

Propriété II.c.1 : Soit $(E,<.,.>)$ est un espace préhilbertien réel. On a alors :
(1) $\forall(x,y)\in E^2,\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2+2<x,y>$
(2) $\forall(x,y)\in E^2,\|x-y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2-2<x,y>$
(3) $\forall(x,y)\in E^2,<x,y>=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2)$
(4) Egalité du parallélogramme : $\forall(x,y)\in E^2,2(\|x\|^2+\|y\|^2)=\|x+y\|^2+\|x-y\|^2$

d) Inégalité de Cauchy-Schwartz

Propriété II.d.1 : Soit $(E,<.,.>)$ est un espace préhilbertien réel. On a alors :

$$\forall(x,y)\in E^2,|<x,y>|\leq\|x\|\|y\|$$

Application II.d.2 :

$$\forall((x_i)_{1\leq i\leq n},(y_i)_{1\leq i\leq n})\in(\mathbb{R}^n)^2,\sum_{i=1}^n x_iy_i\leq\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

Application II.d.3 : Montrer que :

$$\forall((x_i)_{1\leq i\leq n})\in(]0;1])^n,\sum_{k=1}^n x_k=1\Rightarrow\sum_{k=1}^n\frac{1}{x_k}\geq n^2$$

Propriété II.d.4 (Inégalité triangulaire) : Soit $(E,<.,.>)$ est un espace préhilbertien réel. On a alors :

$$\forall(x,y)\in E^2,\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$$

Remarque : On a de même :

$$\forall(x,y,z)\in E^3,d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$$

Propriété II.d.5 : On a l'équivalence suivante :

$$\|x+y\|=\|x\|+\|y\|\Leftrightarrow x=0\text{ ou }\exists\alpha\geq0,y=\alpha.x$$

Propriété II.d.6 :

$$\forall(x,y)\in E^2,|\|x\|-\|y\||\leq\|x-y\|$$