Chapitre 29 : Produit scalaire et espace euclidien
Partie B : Orthogonalité et base orthonormée

Dans tout ce chapitre $(E, <.;.>)$ désigne un espace préhilbertien.

I) Orthogonalité

a) Vecteurs orthogonaux

Définition : Soit $(e_1, e_2) \in E^2$. On dit que e_1 et e_2 sont <u>orthogonaux</u> si et seulement si $< e_1; e_2 > = 0$.

Exemple I.a.1 : On pose $(\mathbb{R}_2[X], <.;.>)$ avec :

$$<.;.>: \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R} \\ (P, Q) \mapsto \sum_{i=0}^{2} P(i)Q(i) \end{cases}$$

Déterminer un vecteur orthogonal non nul à $P(X) = X^2 - 5X + 3$.

Exemple I.a.2 : On pose $(\mathbb{R}^3, <.;.>)$ avec :

$$<.;.>: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) \mapsto x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \end{cases}$$

Déterminer un vecteur orthogonal non nul à $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Propriété I.a.3 (Théorème de Pythagore) : On a l'équivalence suivante :

$$e_1 \text{ et } e_2 \text{ sont orthogonaux} \Leftrightarrow \|e_1 + e_2\|^2 = \|e_1\|^2 + \|e_2\|^2$$

b) Parties orthogonales

Définition : Soient A et B deux parties de E. On dit que A et B sont <u>orthogonales</u> si et seulement si :

$$\forall (a, b) \in A \times B, < a; b > = 0$$

Exemple I.b.1 : On pose $(\mathbb{R}^3, <.;.>)$ avec :

$$<.;.>: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) \mapsto x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \end{cases}$$

De plus on pose $F = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\right\}$ et $G = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Montrer que G et F sont orthogonaux.

Définition : Soit A une partie de E, on définit l'orthogonale de A, noté $A^\perp$, l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de A :

$$A^\perp = \{e \in E;\ \forall a \in A, < a; e > = 0\}$$

Exemple I.b.2 : On pose $(\mathbb{R}^3, <.;.>)$ avec :

$$<.;.>: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) \mapsto x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \end{cases}$$

De plus on a $H = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$. Déterminer $H^\perp$.

Propriété I.b.3 : Soient A et B deux parties de E. On a :
(1) $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.
(2) Si $A = \mathrm{vect}(e_1; \dots; e_n)$ alors :

$$x \in A^\perp \Leftrightarrow \forall i \in [\![1; n]\!], < x; e_i > = 0$$

(3) Si $A \subset B$, alors $B^\perp \subset A^\perp$
(4)$A \subset (A^\perp)^\perp$

Application I.b.4 : Démontrer que :

$$\begin{cases} \{0_E\}^\perp = E \\ E^\perp = \{0_E\} \end{cases}$$

Application I.b.5 : Démontrer que :

$$a = b \Leftrightarrow \forall e \in E, < a; e > = < b; e >$$

c) Familles orthogonales

Définition : On dit qu'une famille $(e_1, \dots, e_n) \in E^n$ est orthogonale si et seulement si :

$$\forall (i,j) \in [\![1; n]\!]^2, i \neq j \Longrightarrow \langle e_i; e_j \rangle = 0$$

Exemple I.c.1 : Déterminer une famille orthogonale de $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique.

Exemple I.c.2 : Déterminer une famille orthogonale de $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire :

$$\langle .;. \rangle : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R} \\ (P, Q) \mapsto \displaystyle\sum_{i=0}^{2} P(i)Q(i) \end{cases}$$

Définition : On dit qu'une famille $(e_1, \dots, e_n) \in E^n$ est orthonormée si elle est orthogonale et chaque vecteur a une norme de 1 :

$$\begin{cases} \forall (i,j) \in [\![1; n]\!]^2, i \neq j \Longrightarrow \langle e_i; e_j \rangle = 0 \\ \forall i \in [\![1, n]\!], \|e_i\| = 1 \end{cases}$$

Exemple I.c.3 : Déterminer une famille orthonormée de $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique.

Propriété I.c.4 (théorème de Pythagore) : Pour toute famille orthogonale $(e_1, \dots, e_n) \in E^n$, on a :

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} e_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|e_i\|^2$$

Propriété I.c.5 : Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls orthogonale est libre.

II) Bases orthonormée

a) Orthonormalisation de Gram-Schmidt

Propriété II.a.1 : Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille libre de E^n. Alors il existe une famille orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$ unique, appelée l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de $(x_1, \dots, x_n)$ telle que :
(1) $\forall k \in [\![1; n]\!], \text{vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{vect}((x_1, \dots, x_k)$
(2)$\forall k \in [\![1; n]\!], \langle e_k, x_k \rangle > 0$

Application II.a.2 : Orthonormaliser la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire :

$$\langle . ; . \rangle : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R} \\ (P, Q) \mapsto \displaystyle\sum_{i=0}^{2} P(i)Q(i) \end{cases}$$

b) Une base orthonormée

Définition : Soit $(E, <.;.>)$ un espace euclidien. On dit que $B = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée si $B = (e_1, \dots, e_n)$ est orthonormée et est une base de E.

Exemple II.b.1 : Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel.

Propriété II.b.2 : Soit $(E, <.;.>)$ un espace euclidien. Alors il existe une base orthonormée de E.

Exemple II.b.3 : Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire usuelle :

$$\langle . ; . \rangle : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R} \\ (P, Q) \mapsto \displaystyle\sum_{i=0}^{2} P(i)Q(i) \end{cases}$$

Propriété II.b.4 : Toute famille orthonormale d'un espace euclidien peut être complété en une base orthonormale de E.

Application II.b.5 : Soit $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Normaliser e puis compléter le vecteur en une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

c) Formule dans une base orthonormée

Propriété II.c.1 : Soit $(E, \langle . ; . \rangle)$ un espace vectoriel euclidien rapporté à une base orthonormée $B = (e_1, \dots, e_n)$. On a alors :
(1)$\forall\ (x, y) \in E^n, \begin{cases} x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \\ y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n \end{cases} \Longrightarrow \langle x; y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$
(2) $\forall x \in E, x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \ \Longrightarrow \|x\|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$
(3)$\forall x \in E, x = \langle x; e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle x; e_n \rangle e_n$

Application II.c.2 : On pose $\mathbb{R}_2[X]$ muni de la base :

$$B = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} ; \frac{X-1}{\sqrt{2}} ; \sqrt{\frac{3}{2}} \left(X^2 - 2X + \frac{1}{3} \right) \right)$$

Ecrire le polynôme $P(X) = X^2 - 1$ dans cette base.