Fiche exercices 29 : Déterminants

Exercice 1 : Calculer les déterminants suivants :

$$a=\begin{vmatrix}3&-1&2\\1&1&-3\\2&2&1\end{vmatrix}\ ;\ b=\begin{vmatrix}3&-4&1\\2&-1&5\\1&-1&1\end{vmatrix},c=\begin{vmatrix}0&a&b\\a&0&c\\b&c&0\end{vmatrix},d=\begin{vmatrix}x+2&2x+3&3x+4\\2x+3&3x+4&4x+5\\3x+5&5x+7&7x+9\end{vmatrix},$$

$$e=\begin{vmatrix}1&\cos(a)&\cos(2a)\\\cos(a)&\cos(2a)&\cos(3a)\\\cos(2a)&\cos(3a)&\cos(4a)\end{vmatrix},f=\begin{vmatrix}a-b-c&2b&2c\\2a&b-c-a&2c\\2a&2b&c-a-b\end{vmatrix}$$

Calcul de $a=\begin{vmatrix}3&-1&2\\1&1&-3\\2&2&1\end{vmatrix}$

Méthode 1 : Par la méthode de Sarrus

$$\begin{vmatrix}3&-1&2\\1&1&-3\\2&2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&-1&2\\1&1&-3\\2&2&1\end{vmatrix}\begin{matrix}3&-1\\1&1\\2&2\end{matrix}$$
$$=3\times1\times1+(-1)\times(-3)\times2+2\times1\times2-2\times2\times1-3\times(-3)\times2-(-1)\times1\times1=28$$

Méthode 2 : A l'aide du pivot de Gauss

$$\begin{vmatrix}3&-1&2\\1&1&-3\\2&2&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&1&-3\\3&-1&2\\2&2&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&1&-3\\0&-4&11\\0&0&7\end{vmatrix}=28$$

Méthode 3 : Par la méthode des mineurs :

$$\begin{vmatrix}3&-1&2\\1&1&-3\\2&2&1\end{vmatrix}=3\times\begin{vmatrix}1&-3\\2&1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}-1&2\\2&1\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}-1&2\\1&-3\end{vmatrix}=3\times7-(-5)+2\times1=28$$

Calcul de $b=\begin{vmatrix}3&-4&1\\2&-1&5\\1&-1&1\end{vmatrix}$

Méthode 1 : Par la méthode de Sarrus

$$\begin{vmatrix}3&-4&1\\2&-1&5\\1&-1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&-4&1\\2&-1&5\\1&-1&1\end{vmatrix}\begin{matrix}3&-4\\2&-1\\1&-1\end{matrix}$$
$$=3\times(-1)\times1+(-4)\times5\times1+1\times2\times(-1)-1\times(-1)\times1-3\times5\times(-1)-(-4)\times2\times1$$
$$=-1$$

Méthode 2 : A l'aide du pivot de Gauss

$$\begin{vmatrix}3&-4&1\\2&-1&5\\1&-1&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&-1&1\\2&-1&5\\3&-4&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&-1&1\\0&1&3\\0&-1&-2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&-1&1\\0&1&3\\0&0&1\end{vmatrix}=-1$$

Méthode 3 : Par la méthode des mineurs :

$$\begin{vmatrix}3&-4&1\\2&-1&5\\1&-1&1\end{vmatrix}=3\times\begin{vmatrix}-1&5\\-1&1\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}-4&1\\-1&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-4&1\\-1&5\end{vmatrix}=3\times4+6-19=-1$$

$$c=\begin{vmatrix}0&a&b\\a&0&c\\b&c&0\end{vmatrix}=-a\begin{vmatrix}a&b\\c&0\end{vmatrix}+b\begin{vmatrix}a&b\\0&c\end{vmatrix}=abc+bac=2abc$$

$$d=\begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4\\ 2x+3 & 3x+4 & 4x+5\\ 3x+5 & 5x+7 & 7x+9\end{vmatrix}$$

Ici on peut voir que :

$$L_1+L_2=L_3$$

On en déduit donc que :

$$d=\begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4\\ 2x+3 & 3x+4 & 4x+5\\ 3x+5 & 5x+7 & 7x+9\end{vmatrix}=0$$

$$e=\begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \cos(2a)\\ \cos(a) & \cos(2a) & \cos(3a)\\ \cos(2a) & \cos(3a) & \cos(4a)\end{vmatrix}$$

On a :

$$\begin{aligned}
e &\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-\cos(a)L_1\\ L_3\leftarrow L_3-\cos(2a)L_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \cos(2a)\\ \cos(a) & \cos(2a) & \cos(3a)\\ \cos(2a) & \cos(3a) & \cos(4a)\end{vmatrix}\\
&=\begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \cos(2a)\\ 0 & \cos(2a)-\cos^2(a) & \cos(3a)-\cos(a)\cos(2a)\\ 0 & \cos(3a)-\cos(a)\cos(2a) & \cos(4a)-\cos^2(2a)\end{vmatrix}\\
&=\begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \cos(2a)\\ 0 & -\sin^2(a) & -\sin(a)\sin(2a)\\ 0 & -\sin(a)\sin(2a) & -\sin^2(2a)\end{vmatrix}\\
&=(\sin(a)\sin(2a))^2-(\sin(a)\sin(2a))^2\\
&=0
\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
f&=\begin{vmatrix} a-b-c & 2b & 2c\\ 2a & b-c-a & 2c\\ 2a & 2b & c-a-b\end{vmatrix} \underbrace{=}_{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\ L_3\leftarrow L_3-L_1}} \begin{vmatrix} a-b-c & 2b & 2c\\ a+b+c & -b-c-a & 0\\ a+b+c & 0 & -c-a-b\end{vmatrix}\\
&=(a+b+c)^2\begin{vmatrix} a-b-c & 2b & 2c\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix}\\
&\underbrace{=}_{Dvt\setminus L_2}(a+b+c)^2\big((-1)(-2b)+(-1)(-a+b+c-2c)\big)\\
&=(a+b+c)^2(a+b+c)\\
&=(a+b+c)^2
\end{aligned}$$

Exercice 2 : Calculer le déterminant de $A_n=\left(a_{i,j}\right)_{1\le i,j\le n}$ avec $a_{i,j}=\min(i,j)\,,\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$.

$$A_2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\Longrightarrow \det(A_2)=1$$

$$A_3=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\Longrightarrow \det(A_3)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1$$

$$A_4=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 3 & 3\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1$$

D'une façon générale on peut conjecturer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}, n\ge 2, \det(A_n)=1$$

Démontrons-le.

On pose :

$$A_n = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$$

On a :

$$L_1 = (1 \quad \dots \quad 1), L_2 = (1,2,\dots,2), L_3 = (1,2,3,\dots,3)$$

D'une façon générale on a :

$$\forall i \in [\![1;n]\!], L_i = \left(a_{i,1}; a_{i,2}; \dots; a_{i,n}\right) \text{ avec } \forall j \in [\![1;n]\!] a_{i,j} = \begin{cases} j \text{ si } j \leq i \\ i \text{ sinon} \end{cases}$$

Etape 1 : On effectue les opérations suivantes :

$$\forall i \in [\![2;n]\!], L_i \leftarrow L_i - L_1$$

On a alors :

$$\det(A_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & & & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 4 & \ddots & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & & & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 3 & \ddots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & 3 & & n-1 \end{vmatrix}$$

Etape 2 : **On effectue les opérations suivantes :**

$$\forall i \in [\![3;n]\!], L_i \leftarrow L_i - L_2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & & & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 4 & \ddots & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & & & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 3 & \ddots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & 3 & & n-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & & & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 2 & \ddots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 2 & & n-2 \end{vmatrix}$$

En réitérant le processus on obtient :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & & & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 4 & \ddots & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & & & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & & 1 \\ \vdots & \vdots & 0 & 1 & \ddots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Exercice 3 : Calculer le déterminant des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 7 & 11 \\ -8 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\det\left(\begin{pmatrix} 7 & 11 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 7 & 11 \\ -8 & 4 \end{vmatrix} = 7 \times 4 - (-8) \times 11 = 28 + 88 = 116$$

Méthode 1 : Avec Sarrus car c'est une 3×3

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{matrix} = \underbrace{4 \times 21}_{84} + 0 + \underbrace{6 \times 6 \times 3}_{108} - \underbrace{(6 \times 5 \times 4)}_{120} - \underbrace{(15 \times 6)}_{90}$$

$$= -18$$

Méthode 2 : Avec la matrice échelonnée

$$\begin{vmatrix}1&0&6\\3&4&15\\5&6&21\end{vmatrix}\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-3L_1\\L_3\leftarrow L_3-5L_1}}{=}\begin{vmatrix}1&0&6\\0&4&-3\\0&6&-9\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}1&0&6\\0&4&-3\\0&2&-3\end{vmatrix}=3\times4\begin{vmatrix}1&0&6\\0&1&-\frac{3}{4}\\0&2&-3\end{vmatrix}=12\begin{vmatrix}1&0&6\\0&1&-\frac{3}{4}\\0&0&-\frac{3}{2}\end{vmatrix}=12\times\left(-\frac{3}{2}\right)$$
$$=-18$$

$$\det\left(\begin{pmatrix}1&0&2\\3&4&5\\5&6&7\end{pmatrix}\right)=\begin{vmatrix}1&0&2\\3&4&5\\5&6&7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&2\\3&4&5\\5&6&7\end{vmatrix}\begin{matrix}1&0\\3&4\\5&6\end{matrix}=28+36-40-30=-6$$

$$\det\left(\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&3&5\\4&1&3\end{pmatrix}\right)=\begin{vmatrix}1&0&-1\\2&3&5\\4&1&3\end{vmatrix}\begin{matrix}1&0\\2&3\\4&1\end{matrix}=9-2+12-5=14$$

$$\det\left(\begin{pmatrix}0&1&2&3\\1&2&3&0\\2&3&0&1\\3&0&1&2\end{pmatrix}\right)=\begin{vmatrix}0&1&2&3\\1&2&3&0\\2&3&0&1\\3&0&1&2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&2&3&0\\0&1&2&3\\2&3&0&1\\3&0&1&2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&2&3&0\\0&1&2&3\\0&-1&-6&1\\0&-6&-8&2\end{vmatrix}$$
$$=-\begin{vmatrix}1&2&3&0\\0&1&2&3\\0&-1&-6&1\\0&-6&-8&2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&2&3&0\\0&1&2&3\\0&0&-4&4\\0&0&4&20\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&2&3&0\\0&1&2&3\\0&0&-4&4\\0&0&0&24\end{vmatrix}=4\times\begin{vmatrix}1&2&3&0\\0&1&2&3\\0&0&1&-1\\0&0&0&24\end{vmatrix}=4\times4=96$$

$$\det\left(\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}\right)=\begin{vmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&1&0&0\\0&1&1&-1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{vmatrix}=-1$$

On a :

$$\begin{pmatrix}1&2&1&2\\1&3&1&3\\2&1&0&6\\1&1&1&7\end{pmatrix}\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\L_3\leftarrow L_3-2L_1\\L_4\leftarrow L_4-L_1}}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&0&1\\0&-3&-2&2\\0&-1&0&3\end{pmatrix}\underset{\substack{L_3\leftarrow L_3+3L_2\\L_4\leftarrow L_4+L_2}}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&0&1\\0&0&-2&5\\0&0&0&4\end{pmatrix}$$

$$\det\left(\begin{pmatrix}1&2&1&2\\1&3&1&3\\2&1&0&6\\1&1&1&7\end{pmatrix}\right)=\det\left(\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&0&1\\0&-3&-2&2\\0&-1&0&3\end{pmatrix}\right)=\det\left(\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&0&1\\0&0&-2&5\\0&0&0&4\end{pmatrix}\right)=1\times1\times(-2)\times4=-8$$

$$\det\left(\begin{pmatrix}1&2&1&2\\1&3&1&3\\2&1&0&6\\1&1&1&7\end{pmatrix}\right)=\begin{vmatrix}1&2&1&2\\0&1&0&1\\0&-3&-2&2\\0&-1&0&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&1&2\\0&1&0&-1\\0&0&-2&-1\\0&0&0&4\end{vmatrix}=-8$$

Exercice 4 : 1) Calculer l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{u}=\binom{2}{3},\vec{v}=\binom{1}{4}$

2) Calculer le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs :

$$\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\vec{v}=\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix},\vec{w}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

3) Montrer que le volume d'un parallélépipède dont les sommets sont des points à coefficients entiers est un nombre entier.

1) On sait que :

$$\mathcal{A}_{\vec{u},\vec{v}} = |\det(\vec{u};\vec{v})| = \left|\det\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}\right| = |2\times 4 - 1\times 3| = 5$$

2) De même on a :

$$\mathcal{V}_{\vec{u},\vec{v},\vec{w}} = \begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 1\end{vmatrix} \underset{C_3\leftarrow C_3-C_1}{\underbrace{=}} \begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -1\\ 0 & 3 & 1\end{vmatrix} = 4$$

Ou bien par Sarrus :

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 1\end{vmatrix}\begin{matrix}1 & 0\\ 2 & 1\\ 0 & 3\end{matrix} = 1 + 6 - 3 = 4$$

3) On sait que :

$$\mathcal{V}_{\vec{u},\vec{v},\vec{w}} = |\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})| = \left|\det\begin{pmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{pmatrix}\right| = |x_1y_2z_3 - x_1y_3z_2 - x_2y_1z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_3y_2z_1| \in \mathbb{N}$$

Exercice 5 : Calculer le déterminant des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix}a & b & c\\ c & a & b\\ b & c & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10 & 0 & -5 & 15\\ -2 & 7 & 3 & 0\\ 8 & 14 & 0 & 2\\ 0 & -21 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a & a & b & 0\\ a & a & 0 & b\\ c & 0 & a & a\\ 0 & c & a & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0\\ a & 0 & a & 0 & 3\\ b & a & 0 & a & 0\\ 0 & b & 0 & 0 & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -4 & 3 & 0 & 0\\ -3 & 0 & 0 & -3 & -2\\ 0 & 1 & 7 & 0 & 0\\ 4 & 0 & 0 & 7 & 1\end{pmatrix}$$

On a :

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}a & b & c\\ c & a & b\\ b & c & a\end{vmatrix} &\underset{dvt/C_1}{\underbrace{=}} a\times\begin{vmatrix}a & b\\ c & a\end{vmatrix} + (-1)^{2+1}c\times\begin{vmatrix}b & c\\ c & a\end{vmatrix} + b\times\begin{vmatrix}b & c\\ a & b\end{vmatrix}\\ &= a(a^2 - bc) - c(ab - c^2) + b(b^2 - ac)\\ &= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc\end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 1 & 1\end{vmatrix} \underset{dvt/L_2}{\underbrace{=}} \begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix} \underset{C_3\leftarrow C_3-C_1}{\underbrace{=}} \begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix} \underset{dvt/L_1}{\underbrace{=}} \begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix} = -1$$

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}-1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -1\end{vmatrix} &\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2+L_1\\ L_3\leftarrow L_3+L_1\\ L_4\leftarrow L_4+L_1}}{\underbrace{=}} \begin{vmatrix}-1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 2 & 0\end{vmatrix} \underset{\frac{dvt}{C_1}}{\underbrace{=}} -\begin{vmatrix}0 & 2 & 2\\ 2 & 0 & 2\\ 2 & 2 & 0\end{vmatrix} = -8\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}\\ &\underset{L_3\leftarrow L_3-L_2}{\underbrace{=}} -8\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix} \underset{\frac{dvt}{L_2}}{\underbrace{=}} 8\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix} = -16\end{aligned}$$

Exercice 6 : Calculer $\det(A_n)$ avec $A_n = (|i-j|)_{1\leq i,j\leq n}$

On pose :

$$A_n = \begin{pmatrix}L_1\\ \vdots\\ L_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1 & \dots & n-1\\ 1 & & & \\ \vdots & & (A_{n-1}) & \\ n-1 & & & \end{pmatrix}$$

On effectue ensuite les opérations suivantes :

$$\forall i \in [\![2;n]\!], L_i \leftarrow L_i - L_{i-1}$$

On a alors :

$$\Delta_n = \det(A_n) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & n-1 \\ 1 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & 1 & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Ensuite on effectue les opérations suivantes :

$$\forall i \in [\![3;n]\!], L_i \leftarrow L_i - L_{i-1}$$

$$\boldsymbol{\Delta_n = \det(A_n) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & n-2 & n-1 \\ 1 & -1 & \dots & \dots & -1 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & n-2 & n-1 \\ 1 & -1 & \dots & \dots & -1 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}(n-1)2^{n-2}}$$

Exercice 7 : Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, n \geq 3$. Montrer que :

$$\begin{vmatrix} \cos(a_1+a_1) & \cos(a_1+a_2) & \dots & \cos(a_1+a_n) \\ \cos(a_2+a_1) & \cos(a_2+a_2) & \dots & \cos(a_2+a_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos(a_n+a_1) & \cos(a_n+a_2) & & \cos(a_n+a_n) \end{vmatrix} = 0$$

Pour démontrer que le déterminant est différent de 0, on va démontrer que la famille formée des colonnes de la matrice n'est pas libre !

On pose :

$$A = \begin{pmatrix} \cos(a_1+a_1) & \cos(a_1+a_2) & \dots & \cos(a_1+a_n) \\ \cos(a_2+a_1) & \cos(a_2+a_2) & \dots & \cos(a_2+a_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos(a_n+a_1) & \cos(a_n+a_2) & & \cos(a_n+a_n) \end{pmatrix}$$

On pose pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, C_i la colonne de A. On a alors :

$$\forall i \in [\![1;n]\!], C_i = \begin{pmatrix} \cos(a_1+a_i) \\ \cos(a_2+a_i) \\ \vdots \\ \cos(a_n+a_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(a_1)\cos(a_i) - \sin(a_1)\sin(a_i) \\ \cos(a_2)\cos(a_i) - \sin(a_2)\sin(a_i) \\ \vdots \\ \cos(a_n)\cos(a_i) - \sin(a_n)\sin(a_i) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(a_1)\cos(a_i) \\ \cos(a_2)\cos(a_i) \\ \vdots \\ \cos(a_n)\cos(a_i) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sin(a_1)\sin(a_i) \\ \sin(a_2)\sin(a_i) \\ \vdots \\ \sin(a_n)\sin(a_i) \end{pmatrix}$$

$$= \cos(a_i) \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(a_1) \\ \cos(a_2) \\ \vdots \\ \cos(a_n) \end{pmatrix}}_{=C} - \sin(a_i) \underbrace{\begin{pmatrix} \sin(a_1) \\ \sin(a_2) \\ \vdots \\ \sin(a_n) \end{pmatrix}}_{=S}$$

On a alors :

$$\forall i \in [\![1;n]\!], C_i = \begin{pmatrix} \cos(a_1+a_i) \\ \cos(a_2+a_i) \\ \vdots \\ \cos(a_n+a_i) \end{pmatrix} = \cos(a_i)\, C - \sin(a_i)\, S$$

On ne déduit donc que :

$$\forall i \in [\![1;n]\!], C_i \in \mathrm{vect}(C, S)$$

Or on sait que :

$$\dim\big(\mathrm{vect}(C,S)\big) \leq 2$$

On en déduit que :

$$\mathrm{rg}(C_1, C_2, \dots, C_n) \leq 2$$

On en déduit donc que :

$\forall n \geq 3, (C_1, \dots, C_n)$ n'est pas libre ! Donc :

$$\det_{B_c}(C_1,\dots,C_n)=\begin{vmatrix}\cos(a_1+a_1) & \cos(a_1+a_2) & \dots & \cos(a_1+a_n)\\ \cos(a_2+a_1) & \cos(a_2+a_2) & \dots & \cos(a_2+a_n)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \cos(a_n+a_1) & \cos(a_n+a_2) & & \cos(a_n+a_n)\end{vmatrix}=0$$

Exercice 8 : Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2, n\in\mathbb{N}$, et $\mathcal{M}_n\in\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ telle que :

$$M_n=\begin{pmatrix} a & 0 & \dots & \dots & 0 & b\\ 0 & \ddots & 0 & & & 0\\ \vdots & 0 & a & b & & \vdots\\ \vdots & & b & a & & \vdots\\ 0 & 0 & & & \ddots & 0\\ b & 0 & \dots & \dots & 0 & a\end{pmatrix}=\det\left(aI_{2n}+b\left(\sum_{k=1}^{2n}E_{2n+1-k,k}\right)\right)$$

Montrer que $\det(M_n)=(a^2-b^2)^n$

$$\det(M_n)\underset{L_1\leftarrow L_1-L_{2n}}{=}\begin{vmatrix} a & 0 & \dots & \dots & 0 & b\\ 0 & \ddots & 0 & & b & 0\\ \vdots & 0 & a & b & & \vdots\\ \vdots & & b & a & & \vdots\\ 0 & b & & & \ddots & 0\\ b & 0 & \dots & \dots & 0 & a\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a-b & 0 & \dots & \dots & 0 & b-a\\ 0 & \ddots & 0 & & & 0\\ \vdots & 0 & a & b & & \vdots\\ \vdots & & b & a & & \vdots\\ 0 & b & & & \ddots & 0\\ b & 0 & \dots & \dots & 0 & a\end{vmatrix}$$

$$=(a-b)\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1\\ 0 & a & 0 & & & 0\\ \vdots & 0 & a & b & & \vdots\\ \vdots & & b & a & & \vdots\\ 0 & b & & & \ddots & 0\\ b & 0 & \dots & \dots & 0 & a\end{vmatrix}$$

$$\underset{C_1\leftarrow C_1+C_{2n}}{=}(a-b)\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1\\ 0 & a & 0 & & & 0\\ \vdots & 0 & a & b & & \vdots\\ \vdots & & b & a & & \vdots\\ 0 & b & & & \ddots & 0\\ a+b & 0 & \dots & \dots & 0 & a\end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{Dvt } C_1}{=}(-1)^{2n+1}(a^2-b^2)\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1\\ 0 & a & 0 & & & 0\\ \vdots & 0 & a & b & & \vdots\\ \vdots & & b & a & & \vdots\\ 0 & b & & & a & 0\\ b & 0 & \dots & \dots & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{Dvt } L_1}{=}(-1)^{2n+1}(a^2-b^2)(-1)^{2n-1+1}\times(-1)\times\begin{vmatrix} a & 0 & \dots & \dots & 0 & b\\ 0 & \ddots & 0 & & b & 0\\ \vdots & 0 & a & b & & \vdots\\ \vdots & & b & a & & \vdots\\ 0 & b & & & \ddots & 0\\ b & 0 & \dots & \dots & 0 & a\end{vmatrix}$$

$$=(a^2-b^2)\times M_{n-1}$$

On a alors :

$$\forall n\in\mathbb{N}, M_n=(a^2-b^2)^{n-1}M_1=(a^2-b^2)^{n-1}\begin{vmatrix} a & b\\ b & a\end{vmatrix}=(a^2-b^2)^n$$

Exercice 9 : On pose :

$$\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2,\forall n\geq 2, D_n=\begin{vmatrix} a+b & a & & & (0) \\ b & a+b & a & & \\ & b & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & a+b & a \\ (0) & & & b & a+b \end{vmatrix}$$

Déterminer une expression de D_n en fonction de n.

On développe par rapport à la première colonne :

$$\forall n\geq 4, D_n=\begin{vmatrix} a+b & a & & & (0) \\ b & a+b & a & & \\ & b & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & a+b & a \\ (0) & & & b & a+b \end{vmatrix}$$

$$=(a+b)\times D_{n-1}-b\times\begin{vmatrix} a & 0 & \dots & \dots & 0 \\ b & a+b & a & & \\ & b & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & a+b & a \\ (0) & & & b & a+b \end{vmatrix}$$

Pour calculer $\begin{vmatrix} a & 0 & \dots & \dots & 0 \\ b & a+b & a & & \\ & b & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & a+b & a \\ (0) & & & b & a+b \end{vmatrix}$, on développe par rapport à la première ligne :

$$\begin{vmatrix} a & 0 & \dots & \dots & 0 \\ b & a+b & a & & \\ & b & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & a+b & a \\ (0) & & & b & a+b \end{vmatrix}=a\times D_{n-2}$$

On a donc :

$$\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2,\forall n\geq 4, D_n=(a+b)D_{n-1}-ab\times D_{n-2}$$

Illustration sur une matrice 4 × 4 :

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a+b} & \mathbf{a} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{b} & \mathbf{a+b} & \mathbf{a} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{b} & \mathbf{a+b} & \mathbf{a} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{b} & \mathbf{a+b} \end{vmatrix}=\mathbf{(a+b)}\times\begin{vmatrix} \mathbf{a+b} & \mathbf{a} & \mathbf{0} \\ \mathbf{b} & \mathbf{a+b} & \mathbf{a} \\ \mathbf{0} & \mathbf{b} & \mathbf{a+b} \end{vmatrix}-\mathbf{b}\times\begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{b} & \mathbf{a+b} & \mathbf{a} \\ \mathbf{0} & \mathbf{b} & \mathbf{a+b} \end{vmatrix}$$

$$=\mathbf{(a+b)\times D_3-b\times a}\times\begin{vmatrix} \mathbf{a+b} & \mathbf{a} \\ \mathbf{b} & \mathbf{a+b} \end{vmatrix}$$

$$=\mathbf{(a+b)D_3-ab\times D_2}$$

On a :

$$\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2,\forall n\geq 4, D_n=(a+b)D_{n-1}-ab\times D_{n-2}$$
$$\Leftrightarrow D_n-(a+b)D_{n-1}+abD_{n-2}=0$$

On résout l'équation caractéristique :

$$r^2-(a+b)r+ab=0$$

On a alors :

$$\Delta=(a+b)^2-4ab=(a-b)^2$$

On a alors :

$$r^2-(a+b)r+ab=0\Leftrightarrow\begin{cases} r=a \\ \text{ou} \\ r=b \end{cases}$$

On a donc :

$$\exists(A,B)\in\mathbb{R}^2,\forall n\geq 1, D_n=A\times a^{n-1}+B\times b^{n-1}$$

Or on sait que :

$$D_1 = |a+b| = a+b, D_2 = \begin{vmatrix} a+b & a \\ b & a+b \end{vmatrix} = (a+b)^2 - ab$$

On a alors :

$$\begin{cases} A+B = a+b \\ aA+bB = a^2+b^2+ab \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} aA+aB = a^2+ab \\ aA+bB = a^2+b^2+ab \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B = a+b \\ (a-b)B = -b^2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} B = -\dfrac{b^2}{a-b} \text{ si } a \neq b \\ A = \dfrac{a^2}{a-b} \end{cases}$$

On a alors :

$$\forall n \geq 1, D_n = \frac{a^2}{a-b} \times a^{n-1} - \frac{b^2}{a-b} \times b^{n-1} = \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} = \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$$

La formule reste vraie pour $a = b$.

On peut vérifier pour $n = 3$:

$$\begin{vmatrix} a+b & a & 0 \\ b & a+b & a \\ 0 & b & a+b \end{vmatrix} = (a+b) \times \begin{vmatrix} a+b & a \\ b & a+b \end{vmatrix} - b \times \begin{vmatrix} a & 0 \\ b & a+b \end{vmatrix}$$
$$= (a+b) \times \left((a+b)^2 - ab\right) - ab(a+b)$$
$$= (a+b)^3 - a^2b - ab^2 - a^2b - ab^2$$
$$= a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$$

Pour $n = 4$:

$$\begin{vmatrix} a+b & a & 0 & 0 \\ b & a+b & a & 0 \\ 0 & b & a+b & a \\ 0 & 0 & b & a+b \end{vmatrix} = (a+b) \times \begin{vmatrix} a+b & a & 0 \\ b & a+b & a \\ 0 & b & a+b \end{vmatrix} - b \times \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a+b & a \\ 0 & b & a+b \end{vmatrix}$$
$$= (a+b) \times D_3 - b \times a \times \begin{vmatrix} a+b & a \\ b & a+b \end{vmatrix}$$
$$= (a+b)D_3 - ab \times D_2$$
$$= (a+b)\left(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3\right) - ab\left(a^2 + b^2 + ab\right)$$
$$= a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4$$

Le résultat se vérifie pour $n = 3$ et $n = 4$.

Exercice 10 : Soients $(x, \theta) \in \mathbb{R}^2, n \in \mathbb{N}$. Calculer les déterminants $n \times n$ suivants :

$$A_n = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix} \quad ; \quad B_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & x \\ 0 & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

a) En développant par rapport à la première colonne on obtient :

$$A_n = 2\cos(\theta)\, A_{n-1} - A_{n-2}$$

On résout donc :

$$r^2 - 2\cos(\theta)\, r + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r = e^{i\theta} \\ \quad ou \\ r = e^{-i\theta} \end{cases}$$

On doit donc distinguer deux cas :

1er cas : $\theta \equiv$

Exercice 11 : Soit $a \in \mathbb{R}$. On note Δ_n le déterminant suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \dots & 0 & n-1 \\ 0 & a & 0 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & & \ddots & a & 1 \\ n-1 & \dots & 2 & 1 & a \end{vmatrix}$$

1) Calculer Δ_n en fonction de Δ_{n-1}.

2) Démontrer que :

$$\forall n \geq 2, \Delta_n = a^n - a^{n-2} \sum_{i=1}^{n-1} i^2$$

---

1) On a :

$$\Delta_n = \left| \underbrace{\left.\begin{matrix} a & 0 & \dots & 0 & n-1 \\ 0 & a & 0 & & \vdots \\ & 0 & \ddots & \ddots & 2 \\ & & \ddots & a & 1 \\ n-1 & \dots & 2 & 1 & a \end{matrix}\right\} n \text{ lignes}}_{n \text{ colonnes}} \right|$$

On développe par rapport à la colonne C_1 :

$$\begin{vmatrix} a & 0 & \dots & 0 & n-1 \\ 0 & a & 0 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & & \ddots & a & 1 \\ n-1 & \dots & 2 & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^2 a \times \begin{vmatrix} a & 0 & \dots & 0 & n-2 \\ 0 & a & 0 & & \vdots \\ & 0 & \ddots & \ddots & 2 \\ & & \ddots & a & 1 \\ n-2 & \dots & 2 & 1 & a \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} \times (n-1) \times \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & n-1 \\ a & 0 & \dots & \vdots \\ (0) & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \dots & a & 1 \end{vmatrix}$$

$$= a \times \Delta_{n-1} + (-1)^{n+1} \times (n-1) \times (-1)^{n-1+1} \times (n-1) \times \begin{vmatrix} a & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & a \end{vmatrix}$$

$$= a \times \Delta_{n-1} - (n-1)^2 a^{n-2}$$

On a donc :

$$\boxed{\forall n \geq 3, \Delta_n = a\Delta_{n-1} - (n-1)^2 a^{n-2}}$$

2) On le démontre par récurrence.

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \mathcal{P}(n) : \Delta_n = a^n - a^{n-2} \sum_{i=1}^{n-1} i^2$$

Initialisation : $n = 2$. On a :

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1$$

De plus :

$$a^2 - a^{2-2}\sum_{i=1}^{2-1} i^2 = a^2 - 1$$

Donc $\mathcal{P}(2)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel supérieur ou égale à 2. On suppose que :

$$\Delta_n = a^n - a^{n-2}\sum_{i=1}^{n-1} i^2$$

On a :

$$\begin{aligned}\Delta_{n+1} &= a \times \Delta_n - n^2 a^{n-1}\\ &= a \times \left(a^n - a^{n-2}\sum_{i=1}^{n-1} i^2\right) - n^2 a^{n-1}\\ &= a^{n+1} - a^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n-1} i^2 + n^2\right)\\ &= a^{n+1} - a^{n-1}\sum_{i=1}^{n} i^2\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire.

Conclusion : On conclut d'après le principe de récurrence.

Exercice 11 (Déterminant de Vandermonde) : Montrer que :

$$\begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \dots & t_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \dots & t_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (t_j - t_i)$$

Exercice 12 : Utiliser un déterminant pour montrer que les familles suivantes sont des bases de E :

a) $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $P_1(X) = X^2, P_2(X) = X(X-1)$ et $P_3(X) = (X-1)^2$

b) $E = \mathbb{C}^3, e_1 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 1-i \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} -2+i \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}$

a) On calcule :

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 = 1 \neq 0$$

Donc $(X^2, X(X-1), (X-1)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

b) On calcule :

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1+i & i & -2+i \\ 1 & -1 & 0 \\ i & 1-i & -i \end{vmatrix} \underbrace{=}_{C_2 \leftarrow C_2 + C_1} \begin{vmatrix} 1+i & 1+2i & -2+i \\ 1 & 0 & 0 \\ i & 1 & -i \end{vmatrix} &= -\begin{vmatrix} 1+2i & -2+i \\ 1 & -i \end{vmatrix} = -(-i(1+2i) - (-2+i))\\ &= -4 + 2i \neq 0\end{aligned}$$

Donc $\left(\begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 1-i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2+i \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathbb{C}^3$.

Exercice 13 : Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. On pose :

$$u_A : \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \\ M \mapsto AM \end{cases}$$

a) Montrer que u est un endomorphisme.

b) Montrer que $\det(u_A) = (\det(A))^2$.

a) On a :

$$\forall (M_1, M_2) \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{K}))^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, u_A(\lambda M_1 + M_2) = A(\lambda M_1 + M_2) = \lambda AM_1 + AM_2 = \lambda u_A(M_1) + u_A(M_2)$$

Donc $u_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{K}))$.

b) On pose :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

On a alors $\det(A) = ad - bc$.

De plus on pose $E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On a alors :

$$u_A(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = aE_{1,1} + cE_{2,1}$$
$$u_A(E_{1,2}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} = aE_{1,2} + cE_{2,2}$$
$$u_A(E_{2,1}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} = bE_{1,1} + dE_{2,1}$$
$$u_A(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = bE_{1,1} + dE_{2,1}$$

$$\mathrm{mat}_{(E_{1,1};E_{1,2};E_{2,1};E_{2,2})}(u_A) = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$\det(u_A) = \begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{vmatrix} = a \times \begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & d & 0 \\ c & 0 & d \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} 0 & b & 0 \\ a & 0 & b \\ c & 0 & d \end{vmatrix} = a \times (ad^2 - cbd) + c(-abd + cb^2)$$
$$= a^2d^2 + c^2b^2 - 2adbc$$
$$= (ad - bc)^2$$
$$= (\det(A))^2$$

Exercice 14 : Soit φ l'application qui, à tout polynôme réel P de degré inférieur ou égale à 2, associe Q défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) = \int_x^{x+1} P(t)dt$$

Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ et calculer $\det(\varphi)$.

On a :

$$\forall (P_1, P_2) \in (\mathbb{R}_2[X])^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \varphi(\lambda P_1 + P_2)(X) = \int_X^{X+1} (\lambda P_1 + P_2)(t)dt$$
$$= \lambda \int_X^{X+1} (\lambda P_1 + P_2)(t)dt$$

Avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, Q(X) = \int_X^{X+1} (\lambda P_1 + P_2)(t)dt = \lambda \int_X^{X+1} P_1(t)dt + \int_X^{X+1} P_2(t)dt = \lambda\varphi(P_1)(X) + \varphi(P_2)(X)$$

Donc φ est linéaire.

On cherche à présent son déterminant. On pose $P_1(X) = 1, P_2(X) = X$et $P_3(X) = X^2$

On a :

$$\varphi(P_1)(X) = \int_X^{X+1} 1dt = 1$$

$$\varphi(P_2)(X) = \int_X^{X+1} tdt = \frac{(X+1)^2}{2} - \frac{X^2}{2} = X + \frac{1}{2}$$

$$\varphi(P_3)(X) = \int_X^{X+1} t^2dt = \frac{(X+1)^3}{3} - \frac{X^3}{3} = X^2 + X + \frac{1}{3}$$

On a alors :

$$\mathbf{mat_{B_c}(\varphi)} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{\frac{1}{2}} & \mathbf{\frac{1}{3}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{det}\left(\mathbf{mat_{B_c}(\varphi)}\right) = \mathbf{det(\varphi)} = \mathbf{1}$$

Exercice 15 : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ canoniquement associé à :

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -3 & 3 & -3 \\ -1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

a) On pose : $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

b) Déterminer $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) = C$.

c) Calculer $\det(C)$, $\det(f)$ et $\det(A)$.

a) On peut le faire de différentes façons. Je vais utiliser le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\mathrm{dvt} \setminus C_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

On en déduit donc que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

b) On a :

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -3 & 3 & -3 \\ -1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -3 & 3 & -3 \\ -1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\2\\0\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}5&-3&3&-3\\-1&3&1&-1\\1&-1&5&1\\-1&1&-1&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\3\\3\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}5&-3&3&-3\\-1&3&1&-1\\1&-1&5&1\\-1&1&-1&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\0\\0\\4\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

On en déduit donc que :

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}=C$$

c) On sait que le déterminant d'une matrice triangulaire (donc en partie une matrice diagonale !) est le produit des éléments de la diagonale.
De plus on sait que le déterminant est invariant par changement de base. On a donc :

$$\det(C)=\det(f)=\det(A)=24.$$

Exercice 16 : Résoudre chacun des systèmes suivants

$$\begin{cases}3x-6y+z=7\\x+2y+z=5\\-2x+5y-2z=-1\end{cases};\quad\begin{cases}mx+y+z=1\\x+my+z=m\\x+y+mz=m^2\end{cases}$$

$$\begin{cases}3x-6y+z=7\\x+2y+z=5\\-2x+5y-2z=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}3&-6&1\\1&2&1\\-2&5&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\5\\-1\end{pmatrix}$$

Ce système admet une unique solution si et seulement si $\begin{pmatrix}3&-6&1\\1&2&1\\-2&5&-2\end{pmatrix}=A$ est inversible.

On calcule :

$$\det\left(\begin{pmatrix}3&-6&1\\1&2&1\\-2&5&-2\end{pmatrix}\right)\underbrace{=}_{C_3\leftarrow C_3-C_1}\begin{vmatrix}3&-6&-2\\1&2&0\\-2&5&0\end{vmatrix}=(-2)\times\begin{vmatrix}1&2\\-2&5\end{vmatrix}=-18\neq0$$

$\begin{pmatrix}3&-6&1\\1&2&1\\-2&5&-2\end{pmatrix}$ est inversible donc le système $\begin{cases}3x-6y+z=7\\x+2y+z=5\\-2x+5y-2z=-1\end{cases}$ admet une unique solution.

$$\begin{cases}3x-6y+z=7\\x+2y+z=5\\-2x+5y-2z=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}3&-6&1\\1&2&1\\-2&5&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\5\\-1\end{pmatrix}$$

De même on veut résoudre :

$$\begin{cases}mx+y+z=1\\x+my+z=m\\x+y+mz=m^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}m&1&1\\1&m&1\\1&1&m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\m\\m^2\end{pmatrix}$$

On pose $A=\begin{pmatrix}m&1&1\\1&m&1\\1&1&m\end{pmatrix}$. On va regarder pour quelles valeurs de m la matrice est inversible.

$$\det(A)=\begin{vmatrix}m&1&1\\1&m&1\\1&1&m\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&m&1\\m&1&1\\1&1&m\end{vmatrix}\underbrace{=}_{\substack{L_2\leftarrow L_2-mL_1\\L_3\leftarrow L_3-L_1}}-\begin{vmatrix}1&m&1\\0&1-m^2&1-m\\0&1-m&m-1\end{vmatrix}=-(1-m)^2\begin{vmatrix}1&m&1\\0&1+m&1\\0&1&-1\end{vmatrix}$$

$$=-(1-m)^2(-1-m-1)$$

$$=(1-m)^2(m+2)$$

Ainsi le système $\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$ admet une unique solution si et seulement si $m \notin \{-2; 1\}$.

<u>1er cas : Si $m \notin \{-2; 1\}$</u>

<u>2ième cas : Si m= 1 :</u>

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x + y + z = 1$$

Donc le système admet une infinité de solutions, c'est géométriquement le plan d'équation $(\mathcal{P}) : x + y + z = 1$.

<u>3ième cas : Si $m = -2$</u>

$$\begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = -2 \\ x + y - 2z = 4 \end{cases}$$

On a :

$$(-2x + y + z) + (x - 2y + z) = -x - y + 2z \text{ et } 1 + (-2) = -1 \neq 4$$

Le système $\begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = -2 \\ x + y - 2z = 4 \end{cases}$ n'a aucune solution. Il est incompatible !