Correction DS n°8

Exercice : Saut d'une puce

Une puce se déplace à chaque unité de temps sur les quatre sommets, nommés $A, B, C\ et\ D$, d'un carré selon le protocole suivant :

- A l'instant 0, la puce se trouve sur le sommet A
- Si à l'instant $n \geq 0$, la puce se trouve sur le sommet A, elle sera à l'instant $n+1$ sur le sommet A avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et sur le somme C avec la probabilité $\frac{1}{3}$.
- Si à l'instant $n \geq 0$, la puce se trouve sur le sommet B, elle sera à l'instant $n+1$ sur le sommet A avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et sur le somme C avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
- Si à l'instant $n \geq 0$, la puce se trouve sur le sommet C, elle sera à l'instant $n+1$ sur le sommet B avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et sur le somme D avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
- Si à l'instant $n \geq 0$, la puce se trouve sur le sommet D, elle sera à l'instant $n+1$ sur le sommet D avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et sur le somme B avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

Pour tout entier naturel n, on note :
A_n = « La puce se trouve au sommet A»
B_n = « La puce se trouve au sommet B»
C_n = « La puce se trouve au sommet C»
D_n = « La puce se trouve au sommet D»

1) Préciser les valeurs de $\mathbb{P}(A_0), \mathbb{P}(B_0), \mathbb{P}(C_0), \mathbb{P}(D_0)$.

2) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(A_{n+1}) = \frac{2}{3}\mathbb{P}(A_n) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(B_n)$$

3) Exprimer de même $\mathbb{P}(B_{n+1}), \mathbb{P}(C_{n+1}), \mathbb{P}(D_{n+1})$ en fonction de $\mathbb{P}(A_n), \mathbb{P}(B_n), \mathbb{P}(C_n), \mathbb{P}(D_n)$.

4) Déterminer : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(C_n) + \mathbb{P}(D_n)$.

5) On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(A_n) \\ \mathbb{P}(B_n) \\ \mathbb{P}(C_n) \end{pmatrix}, V = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ et\ R = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Quelle relation existe-t-il entre $U_{n+1}, U_n, R\ et\ V$?

6) a) Déterminer une matrice $L \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $L = RL + V$

b) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = R^n(U_0 - L) + L$$

7) On pose $M = 6R$ et on appelle f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice M.

8) a) On définit $Q_M(\lambda) = \det(M - \lambda I_3)$. Montrer que Q_M est un polynôme de degré trois, possédant trois racines réelles, à déterminer, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tel que $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.

b) Pour tout $k \in \{1; 2; 3\}$, déterminer une base de chaque sous-espace $E_k = \ker(M - \lambda_k I_3) = \ker(f - \lambda_k Id_{\mathbb{R}^3})$.

c) On pose $B_k = (e_1, e_2, e_3)$ où $e_k = vect(E_k)$. Montrer que B est une base de $\mathbb{R}^3$.

(*Conseil* : Je vous conseille de prendre des coordonnées entières pour les e_i).

d) Ecrire la matrice de f dans la base B, appelé Δ.

e) Quelle relation existe-t-il entre les matrices $M\ et\ \Delta$?

9) Indiquer une méthode de calcul de R^n (on ne demande pas une expression détaillée.

10) a) En déduire la limite de U_n (c'est-à-dire de chacune des composantes de la colonne U_n) lorsque $n \to +\infty$.

b) Déterminer $\lim\limits_{n} \mathbb{P}(D_n)$.

11) Si l'on décide d'écraser cette puce, où vaut-il mieux frapper ?

1) Comme la puce est en A à l'instant $n = 0$, on a :

$$\boxed{\mathbb{P}(\boldsymbol{A_0}) = \mathbf{1}, \mathbb{P}(\boldsymbol{B_0}) = \mathbb{P}(\boldsymbol{C_0}) = \mathbb{P}(\boldsymbol{D_0}) = \mathbf{0}}$$

2) D'après la loi des probabilités totales :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_{n+1} \cap A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1} \cap B_n) + \mathbb{P}(A_{n+1} \cap C_n) + \mathbb{P}(A_{n+1} \cap D_n)$$

Or on a :

$$\boxed{\mathbb{P}(\boldsymbol{A_{n+1}} \cap \boldsymbol{A_n}) = \mathbb{P}_{\boldsymbol{A_n}}(\boldsymbol{A_{n+1}}) \times \mathbb{P}(\boldsymbol{A_n}) + \mathbb{P}_{\boldsymbol{B_n}}(\boldsymbol{B_{n+1}}) \times \mathbb{P}(\boldsymbol{B_n}) = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\mathbb{P}(\boldsymbol{A_n}) + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbb{P}(\boldsymbol{B_n})}$$

3) On a de même :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(B_{n+1}) = \mathbb{P}(B_{n+1} \cap A_n) + \mathbb{P}(B_{n+1} \cap B_n) + \mathbb{P}(B_{n+1} \cap C_n) + \mathbb{P}(B_{n+1} \cap D_n)$$

$$\boxed{\Longrightarrow \mathbb{P}(\boldsymbol{B_{n+1}}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbb{P}(\boldsymbol{C_n}) + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\mathbb{P}(\boldsymbol{D_n})}$$

Enfin on trouve :

$$\boxed{\mathbb{P}(\boldsymbol{C_{n+1}}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\mathbb{P}(\boldsymbol{A_n}) + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbb{P}(\boldsymbol{B_n})}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(\boldsymbol{D_{n+1}}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbb{P}(\boldsymbol{C_n}) + \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\mathbb{P}(\boldsymbol{D_n})}$$

4) On sait que :

$$\boxed{\mathbb{P}(\boldsymbol{\Omega}) = \mathbf{1} \Longrightarrow \forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(\boldsymbol{A_n}) + \mathbb{P}(\boldsymbol{B_n}) + \mathbb{P}(\boldsymbol{C_n}) + \mathbb{P}(\boldsymbol{D_n}) = \mathbf{1}}$$

5) On a :

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(A_{n+1}) \\ \mathbb{P}(B_{n+1}) \\ \mathbb{P}(C_{n+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\mathbb{P}(A_n) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(B_n) \\ \frac{1}{2}\mathbb{P}(C_n) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(D_n) \\ \frac{1}{3}\mathbb{P}(A_n) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(B_n) \end{pmatrix}$$

Or on sait que :

$$\mathbb{P}(D_n) = 1 - \mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(B_n) - \mathbb{P}(C_n)$$

On a donc :

$$U_{n+1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\mathbb{P}(A_n)+\frac{1}{2}\,\mathbb{P}(B_n)\\ \frac{1}{2}\,\mathbb{P}(C_n)+\frac{1}{3}\big(1-\mathbb{P}(A_n)-\mathbb{P}(B_n)-\mathbb{P}(C_n)\big)\\ \frac{1}{3}\,\mathbb{P}(A_n)+\frac{1}{2}\mathbb{P}(B_n)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\mathbb{P}(A_n)+\frac{1}{2}\,\mathbb{P}(B_n)\\ -\frac{1}{3}\mathbb{P}(A_n)-\frac{1}{3}\mathbb{P}(B_n)+\frac{1}{6}\mathbb{P}(C_n)+\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\,\mathbb{P}(A_n)+\frac{1}{2}\mathbb{P}(B_n)\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}4&3&0\\-2&-2&1\\2&3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbb{P}(A_n)\\\mathbb{P}(B_n)\\\mathbb{P}(C_n)\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\boxed{=\boldsymbol{RU_n+V}}$$

6) a) On pose $L=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$. On résout :

$$L=RL+V\Longrightarrow\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}4a+3b\\-2a-2b+c\\2a+3b\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}a-\frac{2}{3}a-\frac{1}{2}b=0\\ b+\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b+\frac{1}{6}c=\frac{1}{3}\\ c-\frac{1}{3}a-\frac{1}{2}b=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}2a=3b\\2a+8b+c=2\\c=\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}a=\frac{3}{10}\\ b=\frac{1}{5}\\ c=\frac{1}{5}\end{cases}$$

b) On raisonne par récurrence.

On pose :

$$\forall n\in\mathbb{N},\mathcal{P}_n="U_n=R^n(U_0-L)+L"$$

Initialisation : $n=0$

On a :

$$R^0(U_0-L)+L=I_3(U_0-L)+L=u_0$$

Hérédité : Soit n un entier fixé. On suppose vraie $\mathcal{P}_n$.

On a :

$$\begin{aligned}U_{n+1}&=RU_n+L=R[R^n(U_0-L)+L]+L\\&=R^{n+1}(U_0-L)+\underbrace{RL+L}_{=L}\\&=R^{n+1}(U_0-L)+L\end{aligned}$$

Donc la proposition est héréditaire.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, on a :

$$\forall n\in\mathbb{N},U_n=R^n(U_0-L)+L$$

7) On pose :

$$M=\begin{pmatrix}4&3&0\\-2&-2&1\\2&3&0\end{pmatrix}\Longrightarrow \det(M-\lambda I_3)=\begin{vmatrix}4-\lambda&3&0\\-2&-2-\lambda&1\\2&3&-\lambda\end{vmatrix}$$
$$=(4-\lambda)\begin{vmatrix}-2-\lambda&1\\3&-\lambda\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}-2&1\\2&-\lambda\end{vmatrix}$$
$$=(4-\lambda)[\lambda(2+\lambda)-3]-3[2\lambda-2]$$
$$=(4-\lambda)(\lambda^2+2\lambda-3)-6(\lambda-1)$$
$$=(4-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+3)-6(\lambda-1)$$
$$=(\lambda-1)[(4-\lambda)(\lambda+3)-6]$$
$$=(\lambda-1)[-\lambda^2+\lambda+6]$$
$$\boldsymbol{=-(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda+2)}$$

On a donc :

$$\lambda_1=-2,\lambda_2=1\ et\ \lambda_3=3$$

On a :

$$E_1=\ker(f-\lambda_1 Id_{\mathbb{R}^3})=\ker(M+2I_3)$$

On cherche donc e_1 tel que $Me_1=-2e_1$. On résout et on peut poser : $e_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$.

De même on cherche :

$$Me_2=e_2.$$

On résout et on peut poser : $e_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$

Enfin on résout :
De même on cherche :

$$Me_3=3e_3.$$

On résout et on peut poser : $e_3=\begin{pmatrix}-3\\1\\-1\end{pmatrix}$

c) On pose :

$$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\1\\-1\end{pmatrix}\right)}}$$

On a :

$$\begin{vmatrix}1&1&-3\\-2&-1&1\\2&-1&-1\end{vmatrix}=-10\neq 0$$

Donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

d) On a :

$$\boxed{\boldsymbol{mat_{\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\1\\-1\end{pmatrix}\right)}(f)=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}=\Delta}}$$

e) On pose :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

On a :

$$\boxed{M = P\Delta P^{-1}}$$

9) On a :

$$R^n = \left(\frac{1}{6}M\right)^n = \frac{1}{6^n}(P\Delta P^{-1})^n = \frac{1}{6^n}P\Delta^n P^{-1}\ (par\ récurrence\ immédiate)$$

On a donc :

$$\boxed{R^n = P\begin{pmatrix} \left(-\frac{2}{6}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1/6^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{3}{6}\right)^n \end{pmatrix}P^{-1}}$$

10) a) On sait que :

$$U_n = R^n(U_0 - L) + L$$

Or on a :

$$\lim_n U_n = 0_3$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{\lim_n U_n = L = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}}$$

b) On a donc :

$$\boxed{\lim_n \mathbb{P}(D_n) = 1 - \frac{3}{10} - \frac{2}{5} = \frac{3}{10}}$$

11) Si on veut écraser la puce, il vaut mieux frapper en $A\ ou\ D$.

Problème I : Interpolation de Hermite

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et f une fonction dérivable de $[a, b]$ à valeur dans $\mathbb{R}$ $\left(f \in \mathcal{D}([a, b], \mathbb{R})\right)$.

Partie A : Polynôme d'interpolation de Hermite

On considère l'application :

$$\Phi: \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^4 \\ P \mapsto \left(P(a), P'(a), P(b), P'(b)\right) \end{cases}$$

1) Démontrer que $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X], \mathbb{R}^4)$.

2) Démontrer que Φ est un isomorphisme.

3) En déduire que :

$$\forall f \in \mathcal{D}([a,b],\mathbb{R}), \exists!\, H \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tel que } H(a) = f(a), H'(a) = f'(a), H(b) = f(b), H'(b) = f'(b)$$

Partie B : Intégrale du polynôme d'interpolation de Hermite

On introduit l'application :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R} \\ P \mapsto \displaystyle\int_a^b P(t)dt \end{cases}$$

On note $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_4$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^4$. Pour tout $k \in [\![0;3]\!]$, on pose $P_k(X) = (X-a)^k$ puis $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$. Pour simplifier les écritures, on notera $\delta = b - a$.

1) Démontrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

2) Déterminer la représentation matricielle de l'application linéaire Φ relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{E}_4$. On note A cette matrice.

3) Montrer que $A \in GL_4(\mathbb{R})$ et :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{\delta^2} & -\frac{2}{\delta} & \frac{3}{\delta^2} & -\frac{1}{\delta} \\ \frac{2}{\delta^3} & \frac{1}{\delta^2} & -\frac{2}{\delta^3} & \frac{1}{\delta^2} \end{pmatrix}$$

4) Justifier que l'application φ est linéaire et déterminer sa représentation matricielle relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{E}_1$. On notera B cette matrice.

5) Soit $f \in \mathcal{D}([a,b],\mathbb{R})$ et $H \in \mathbb{R}_3[X]$ définie à la question 3 de la partie A.

Montrer que :

$$\int_a^b H(t)dt = \frac{\delta}{2}\big(f(a) + f(b)\big) + \frac{\delta^2}{12}\big(f'(a) - f'(b)\big)$$

Partie C : Contrôle de l'erreur commise sur l'intégrale

On suppose à présent que f est de classe $\mathcal{C}^4$.

1) Montrer que :

$$\exists M \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } \forall t \in [a,b], \left|f^{(4)}(t)\right| \leq M$$

2) On note h la fonction polynomiale d'interpolation de Hermite de f sur $[a,b]$. On pose $d = f - h$.

a) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[a,b]$ et que $d^{(4)} = f^{(4)}$.

b) Démontrer que d' s'annuler en trois points distincts sur $[a,b]$ puis que $d^{(3)}$ s'annule sur $[a,b]$.

c) Démontrer que lemme suivant :

Lemme : Soit $g \in \mathcal{D}([a,b],\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $g(c)=0$ et $K \geq 0$ tel que $\forall t \in [a,b], |g'(t)| \leq K$. Alors :

$$\forall t \in [a,b], |g(t)| \leq K(b-a)$$

d) En déduire que :

$$\forall t \in [a,b], |d(t)| \leq M(b-a)^4$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $s=(t_0,t_1,\dots,t_n)$ la subdivision régulière du segment $[a,b]$. Pour tout $k \in [\![0;n-1]\!]$, on pose h_k la fonction polynomiale d'interpolation de Hermite de f sur le segment $[t_k,t_{k+1}]$. Dorénavant, on réemploie la lettre h pour définir la fonction définie sur $[a,b]$ par $h(b)=f(b)$ et dont la restriction sur $[t_k,t_{k+1}[$ est égale à h_k pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$.

a) Montrer que la fonction h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.

b) Soit $k \in [\![0,n-1]\!]$. Donner une majoration de $\left|\int_{t_k}^{t_{k+1}}[f(t)-h_k(t)]dt\right|$ dépendant de M, a, b *et* n.

c) Montrer que :

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \int_a^b h(t)dt\right| \leq \frac{M}{n^4}(b-a)^5$$

Partie A : Polynôme d'interpolation de Hermite

1) On a :

$$\forall(\lambda,P_1,P_2) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_3[X], \Phi(\lambda P_1+P_2)$$
$$=\big((\lambda P_1+P_2)(a),(\lambda P_1+P_2)'(a),(\lambda P_1+P_2)(b),(\lambda P_1+P_2)'(b)\big)$$

Or on sait que :

$$(\lambda P_1+P_2)'=\lambda P_1'+P_2'$$

De même on a :

$$(\lambda P_1+P_2)(a)=\lambda P_1(a)+P_2(a)$$

On a donc :

$$\forall(\lambda,P_1,P_2) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_3[X], \Phi(\lambda P_1+P_2)$$
$$=\lambda\big(P_1(a),{P_1}'(a),P_1(b),{P_1}'(b)\big)+\big(P_2(a),{P_2}'(a),P_2(b),{P_2}'(b)\big)$$
$$=\boldsymbol{\lambda\Phi(P_1)+\Phi(P_2)}$$

Donc $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X],\mathbb{R}^4)$

2) Démontrer que Φ est un isomorphisme.

On a :

$$\Phi(1)=(1{,}0{,}1{,}0),, \qquad et$$

$$\begin{cases} \Phi(1)=(1{,}0{,}1{,}0) \\ \Phi(X)=(a,1,b,1) \\ \Phi(X^2)=(a^2,2a,b^2,2b) \\ \Phi(X^3)=(a^3,3a^2,b^3,3b^2) \end{cases}$$

On a donc :

$$mat_{(1,X,X^2,X^3),\mathcal{B}_c(\mathbb{R}^4)}(\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & 2a & 3a^2 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 0 & 1 & 2b & 3b^2 \end{pmatrix}$$

On a :

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & 2a & 3a^2 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 0 & 1 & 2b & 3b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & 2a & 3a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 & b^3-a^3 \\ 0 & 1 & 2b & 3b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2a & 3a^2 \\ b-a & b^2-a^2 & b^3-a^3 \\ 1 & 2b & 3b^2 \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)\begin{vmatrix} 1 & 2a & 3a^2 \\ 1 & b+a & b^2+ab+a^2 \\ 0 & 2(b-a) & 3(b^2-a^2) \end{vmatrix} = (b-a)\begin{vmatrix} 1 & 2a & 3a^2 \\ 0 & b-a & b^2+ab-2a^2 \\ 0 & 2(b-a) & 3(b^2-a^2) \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)^2\begin{vmatrix} b-a & b^2+ab-2a^2 \\ 2 & 3(b+a) \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)^3\begin{vmatrix} 1 & b+2a \\ 2 & 3(b+a) \end{vmatrix} = \boldsymbol{(b-a)^4 \neq 0}$$

On en déduit donc que Φ est inversible, **c'est donc un isomorphisme.**

3) Il suffit de prendre $f \in \mathcal{D}([a,b],\mathbb{R})$, cela crée un unique 4-uplet $\big(f(a), f'(a), f(b), f'(b)\big)$ et comme Φ est un isomorphisme, on a **l'unicité de $\boldsymbol{H} \in \mathbb{R}_3[\boldsymbol{X}]$.**

Partie B : Intégrale du polynôme d'interpolation de Hermite

1) $\mathcal{B}$ est une famille de polynômes échelonnés et $|\mathcal{B}| = 4 = \dim(\mathbb{R}_3[X])$.

2) On a :

$$\begin{cases} \Phi(1) = (1,0,1,0) \\ \Phi(X-a) = (0,1,b-a,1) \\ \Phi(X^2) = \big(0,0,(b-a)^2, 2(b-a)\big) \\ \Phi(X^3) = \big(0,0,(b-a)^3, 3(b-a)^2\big) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \Phi(1) = (1,0,1,0) \\ \Phi(X-a) = (0,1,\delta,1) \\ \Phi((X-a)^2) = (0,0,\delta^2,2\delta) \\ \Phi((X-a)^3) = (0,0,\delta^3,3\delta^2) \end{cases}$$

On a donc :

$$\boxed{\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{\delta} & \boldsymbol{\delta^2} & \boldsymbol{\delta^3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \boldsymbol{2\delta} & \boldsymbol{3\delta^2} \end{pmatrix}}$$

3) On a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \delta & \delta^2 & \delta^3 \\ 0 & 1 & 2\delta & 3\delta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{\delta^2} & -\frac{2}{\delta} & \frac{3}{\delta^2} & -\frac{1}{\delta} \\ \frac{2}{\delta^3} & \frac{1}{\delta^2} & -\frac{2}{\delta^3} & \frac{1}{\delta^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4$$

Donc $A \in GL_4(\mathbb{R})$ et :

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{\delta^2} & -\frac{2}{\delta} & \frac{3}{\delta^2} & -\frac{1}{\delta} \\ \frac{2}{\delta^3} & \frac{1}{\delta^2} & -\frac{2}{\delta^3} & \frac{1}{\delta^2} \end{pmatrix}}$$

4) On a :

$$\varphi(\lambda P_1 + P_2) = \int_a^b (\lambda P_1 + P_2)(t)dt = \lambda \int_a^b P_1(t)dt + \int_a^b P_2(t)dt$$

Donc φ est linéaire. De plus on a :

$$\Longrightarrow \begin{cases} \varphi(1) = b - a = \delta \\ \varphi(X-a) = \frac{\delta^2}{2} \\ \varphi((X-a)^2) = \frac{\delta^3}{3} \\ \varphi((X-a)^3) = \frac{\delta^4}{4} \end{cases}$$

On a donc :

$$\boxed{mat_{\mathcal{B},\mathcal{E}_1}(\varphi) = \left(\delta, \frac{\delta^2}{2}, \frac{\delta^3}{3}, \frac{\delta^4}{4}\right)}$$

5) On sait que $H \in \mathbb{R}_3[X]$. On a :

$$\begin{cases} H(a) = f(a) \\ H'(a) = f'(a) \\ H(b) = f(b) \\ H'(b) = f'(b) \end{cases}$$

On a :

$$\int_a^b H(t)\,dt = \varphi(H) = \varphi\left(\Phi^{-1}\left(\left(f(a), f'(a), f(b), f'(b)\right)\right)\right) = \varphi o \Phi^{-1}(u)$$

Avec :

$$u = \left(f(a), f'(a), f(b), f'(b)\right)$$

6) On a :

$$\int_a^b H(t)dt = mat_{\mathcal{B},\mathcal{E}_1}(\varphi) \times mat_{\mathcal{B}}(H) = mat_{\mathcal{B},\mathcal{E}_1}(\varphi) \times mat_{\mathcal{E}_4,\mathcal{B}}(\Phi^{-1}) \times mat_{\mathcal{E}_4}(u)$$

$$= \left(\delta, \frac{\delta^2}{2}, \frac{\delta^3}{3}, \frac{\delta^4}{4}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{\delta^2} & -\frac{2}{\delta} & \frac{3}{\delta^2} & -\frac{1}{\delta} \\ \frac{2}{\delta^3} & \frac{1}{\delta^2} & -\frac{2}{\delta^3} & \frac{1}{\delta^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(a) \\ f'(a) \\ f(b) \\ f'(b) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{= \frac{\delta}{2}\big(f(a) + f(b)\big) + \frac{\delta^2}{12}\big(f'(a) - f'(b)\big)}$$

Partie C : Contrôle de l'erreur commise sur l'intégrale

1) $f^{(4)}$ est continue car f est de classe $\mathcal{C}^4$. Or on sait que toute fonction continue sur un segment est majorée et atteint ses bornes. On a donc :

$$\exists M \in \mathbb{R}^+ \; tel\ que\ \forall t \in [a,b], \left|f^{(4)}(t)\right| \leq M$$

2) a) On sait que $h \in \mathbb{R}_3[X]$. Donc h est de classe $\mathcal{C}^4$ et :

$$h^{(4)} = 0_{\mathbb{R}[X]}$$

On en déduit donc que d est de classe $\mathcal{C}^4$ et par linéarité :

$$\boxed{d^{(4)} = f^{(4)}}$$

b) On a $d(a) = f(a) - h(a) = 0, d(b) = f(b) - h(b) = 0$. On a donc d'après le théorème de Rolle :

$$\exists c \in]a,b[\; tel\ que\ d'(c) = 0$$

On a donc $d'(c) = 0$

De plus on a :

$$d'(a) = f'(a) - h'(a) = 0 \; et \; d'(b) = f'(b) - h'(b) = 0$$

Donc d' s'annule en trois points distincts sur $[a,b]$, a, b et c.

On applique alors le théorème de Rolle en trois points pour d'', ce qui nous donne :

$$d''(c_1) = d''(c_2) = 0 \; avec \; a < c_1 < c < c_2 < b$$

On applique de nouveau Rolle pour $d^{(3)}$ et cela prouve que $d^{(3)}$ s'annule sur $[a,b]$.

c) Il suffit d'appliquer le théorème des inégalités des accroissements finis (car $g \in \mathcal{D}([a,b],\mathbb{R})$), en t et en c :

$$|g(t) - g(c)| \leq K|t - c| \leq K(b - a)$$

d) On sait d'après la question 1 que :

On sait que $d^{(3)}$ remplie les hypothèses du lemme. On a donc :

$$\forall t \in [a,b], \left|d^{(3)}(t)\right| \leq M(b-a)$$

De plus $d^{(2)}$ remplie aussi les hypothèses du lemme :

$$\forall t \in [a,b], \left|d^{(2)}(t)\right| \leq \sup_{t\in[a,b]} \left|d^{(3)}(t)\right|(b-a) \leq M(b-a)^2$$

En réitérant le procédé pour d' et d on obtient :

$$\forall t \in [a,b], |d(t)| \leq M(b-a)^4$$

3)

a) Il suffit de regarder les raccordements, car sur chaque intervalle $[t_k, t_{k+1}[$, h est de classe $\mathcal{C}^1$.

On a :

$$\lim_{\substack{t \to t_{k+1} \\ t < t_{k+1}}} h'(t) = \lim_{\substack{t \to t_{k+1} \\ t < t_{k+1}}} h'_k(t) = h'_k(t_{k+1}) = f'(t_{k+1})$$

De même on a :

$$\lim_{\substack{t \to t_{k+1} \\ t > t_{k+1}}} h'(t) = \lim_{\substack{t \to t_{k+1} \\ t > t_{k+1}}} h'_k(t) = h'_{k+1}(t_k) = f'(t_{k+1})$$

Donc h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$.

b) On pose :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], d_k = f - h_k$$

On sait que :

$$\left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} [f(t) - h_k(t)] dt \right| = \left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} d_k(t) dt \right| \leq \int_{t_k}^{t_{k+1}} |d_k(t)| dt \leq \int_{t_k}^{t_{k+1}} M(t_{k+1} - t_k)^4 dt$$

$$\leq M(t_{k+1} - t_k)^5$$

$$\boxed{\leq \frac{M}{n^5}(b-a)^5}$$

c) On sait que :

$$\left| \int_a^b f(t) dt - \int_a^b h(t) dt \right| = \left| \int_a^b f(t) dt - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} h_k(t) dt \right|$$

$$= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t) dt - \int_{t_k}^{t_{k+1}} dt \right) \right|$$

$$= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} [f(t) - h_k(t)] dt \right) \right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} [f(t) - h_k(t)] dt \right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{M}{n^5}(b-a)^5$$

$$\boxed{\leq \frac{M}{n^4}(b-a)^5}$$