DS n°8
PCSI – 15 juin 2024

*On attachera la plus grande importance à la **clarté** et à la **précision** de la rédaction, ainsi qu'à la **propreté** de la présentation, et on veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si on repère ce qui semble être une erreur d'énoncé, on pourra le signaler sur sa copie et poursuivre la composition, en expliquant les raisons de cette initiative.*

*Les exercices et le problème sont indépendants et peuvent donc être traités dans **n'importe quel ordre**. Au cours d'un exercice, lorsque l'on ne peut pas répondre à une question, il est **vivement recommandé** de poursuivre en admettant le résultat que la question demandait de démontrer.*

Exercice : Saut d'une puce

Une puce se déplace à chaque unité de temps sur les quatre sommets, nommés $A, B, C\ et\ D$, d'un carré selon le protocole suivant :

- A l'instant 0, la puce se trouve sur le sommet A
- Si à l'instant $n \geq 0$, la puce se trouve sur le sommet A, elle sera à l'instant $n+1$ sur le sommet A avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et sur le somme C avec la probabilité $\frac{1}{3}$.
- Si à l'instant $n \geq 0$, la puce se trouve sur le sommet B, elle sera à l'instant $n+1$ sur le sommet A avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et sur le somme C avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
- Si à l'instant $n \geq 0$, la puce se trouve sur le sommet C, elle sera à l'instant $n+1$ sur le sommet B avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et sur le somme D avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
- Si à l'instant $n \geq 0$, la puce se trouve sur le sommet D, elle sera à l'instant $n+1$ sur le sommet D avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et sur le somme B avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

Pour tout entier naturel n, on note :

$A_n =$ « La puce se trouve au sommet A»
$B_n =$ « La puce se trouve au sommet B»
$C_n =$ « La puce se trouve au sommet C»
$D_n =$ « La puce se trouve au sommet D»

1) Préciser les valeurs de $\mathbb{P}(A_0), \mathbb{P}(B_0), \mathbb{P}(C_0), \mathbb{P}(D_0)$.

2) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(A_{n+1}) = \frac{2}{3}\mathbb{P}(A_n) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(B_n)$$

3) Exprimer de même $\mathbb{P}(B_{n+1}), \mathbb{P}(C_{n+1}), \mathbb{P}(D_{n+1})$ en fonction de $\mathbb{P}(A_n), \mathbb{P}(B_n), \mathbb{P}(C_n), \mathbb{P}(D_n)$.

4) Déterminer : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(C_n) + \mathbb{P}(D_n)$.

5) On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(A_n) \\ \mathbb{P}(B_n) \\ \mathbb{P}(C_n) \end{pmatrix}, V = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; et \; R = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Quelle relation existe-t-il entre $U_{n+1}, U_n, R \; et \; V$?

6) a) Déterminer une matrice $L \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $L = RL + V$

b) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = R^n(U_0 - L) + L$$

7) On pose $M = 6R$ et on appelle f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice M.

8) a) On définit $Q_M(\lambda) = \det(M - \lambda I_3)$. Montrer que Q_M est un polynôme de degré trois, possédant trois racines réelles, à déterminer, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tel que $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.

b) Pour tout $k \in \{1; 2; 3\}$, déterminer une base de chaque sous-espace $E_k = \ker(M - \lambda_k I_3) = \ker(f - \lambda_k Id_{\mathbb{R}^3})$.

c) On pose $B_k = (e_1, e_2, e_3)$ où $e_k = vect(E_k)$. Montrer que B est une base de $\mathbb{R}^3$.

d) Ecrire la matrice de f dans la base B, appelé Δ.

e) Quelle relation existe-t-il entre les matrices $M \; et \; \Delta$?

9) Indiquer une méthode de calcul de R^n (on ne demande pas une expression détaillée.

10) a) En déduire la limite de U_n (c'est-à-dire de chacune des composantes de la colonne U_n) lorsque $n \to +\infty$.

b) Déterminer $\lim\limits_{n} \mathbb{P}(D_n)$.

11) Si l'on décide d'écraser cette puce, où vaut-il mieux frapper ?

Problème I : Interpolation de Hermite

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et f une fonction dérivable de $[a, b]$ à valeur dans $\mathbb{R}$ $\big(f \in \mathcal{D}([a, b], \mathbb{R})\big)$.

Partie A : Polynôme d'interpolation de Hermite

On considère l'application :

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^4 \\ P \mapsto \big(P(a), P'(a), P(b), P'(b)\big) \end{cases}$$

1) Démontrer que $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X], \mathbb{R}^4)$.

2) Démontrer que Φ est un isomorphisme.

3) En déduire que :

$$\forall f \in \mathcal{D}([a, b], \mathbb{R}), \exists! H \in \mathbb{R}_3[X] \; tel \; que \; H(a) = f(a), H'(a) = f'(a), H(b) = f(b), H'(b) = f'(b)$$

Partie B : Intégrale du polynôme d'interpolation de Hermite

On introduit l'application :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R} \\ P \mapsto \displaystyle\int_a^b P(t)dt \end{cases}$$

On note $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_4$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^4$. Pour tout $k \in [\![0;3]\!]$, on pose $P_k(X) = (X-a)^k$ puis $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$. Pour simplifier les écritures, on notera $\delta = b - a$.

1) Démontrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

2) Déterminer la représentation matricielle de l'application linéaire Φ relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{E}_4$. On note A cette matrice.

3) Montrer que $A \in GL_4(\mathbb{R})$ et :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{\delta^2} & -\frac{2}{\delta} & \frac{3}{\delta^2} & -\frac{1}{\delta} \\ \frac{2}{\delta^3} & \frac{1}{\delta^2} & -\frac{2}{\delta^3} & \frac{1}{\delta^2} \end{pmatrix}$$

4) Justifier que l'application φ est linéaire et déterminer sa représentation matricielle relativement aux bases $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{E}_1$. On notera B cette matrice.

5) Exprimer $\int_a^b H(t)\,dt$ en fonction de φ, Φ et d'un vecteur $u \in \mathbb{R}^4$ à préciser.

6) En déduire, via une opération matricielle, que :

$$\int_a^b H(t)dt = \frac{\delta}{2}\big(f(a) + f(b)\big) + \frac{\delta^2}{12}\big(f'(a) - f'(b)\big)$$

Partie C : Contrôle de l'erreur commise sur l'intégrale

On suppose à présent que f est de classe $\mathcal{C}^4$.

1) Montrer que :

$$\exists M \in \mathbb{R}^+ \; tel\; que\; \forall t \in [a,b], \left|f^{(4)}(t)\right| \leq M$$

2) On note h la fonction polynomiale d'interpolation de Hermite de f sur $[a,b]$. On pose $d = f - h$.

a) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[a,b]$ et que $d^{(4)} = f^{(4)}$.

b) Démontrer que d' s'annuler en trois points distincts sur $[a,b]$ puis que $d^{(3)}$ s'annule sur $[a,b]$.

c) Démontrer que lemme suivant :

Lemme : Soit $g \in \mathcal{D}([a,b],\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $g(c) = 0$ et $K \geq 0$ tel que $\forall t \in [a,b], |g'(t)| \leq K$. Alors :

$$\forall t \in [a,b], |g(t)| \leq K(b-a)$$

d) En déduire que :

$$\forall t \in [a,b], |d(t)| \leq M(b-a)^4$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $s = (t_0, t_1, \dots, t_n)$ la subdivision régulière du segment $[a,b]$. Pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$, on pose h_k la fonction polynomiale d'interpolation de Hermite de f sur le segment $[t_k, t_{k+1}]$. Dorénavant, on réemploie la lettre h pour définir la fonction définie sur $[a,b]$ par $h(b) = f(b)$ et dont la restriction sur $[t_k, t_{k+1}[$ est égale à h_k pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$.

a) Montrer que la fonction h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.

b) Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Donner une majoration de $\left|\int_{t_k}^{t_{k+1}} [f(t) - h_k(t)]dt\right|$ dépendant de $M, a, b\ et\ n.$

c) Montrer que :

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \int_a^b h(t)dt\right| \leq \frac{M}{n^4}(b-a)^5$$