Chapitre 30 – Fonctions de deux variables
Partie A : Ouvert de $\mathbb{R}^2$ et fonctions sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$

Dans tout ce chapitre on munit $\mathbb{R}^2$ de son produit scalaire canonique et de sa norme associée, notée $\| \quad \|$. De même on définit d, la distance canoniquement associée à la norme $\| \quad \|$.
On a donc :

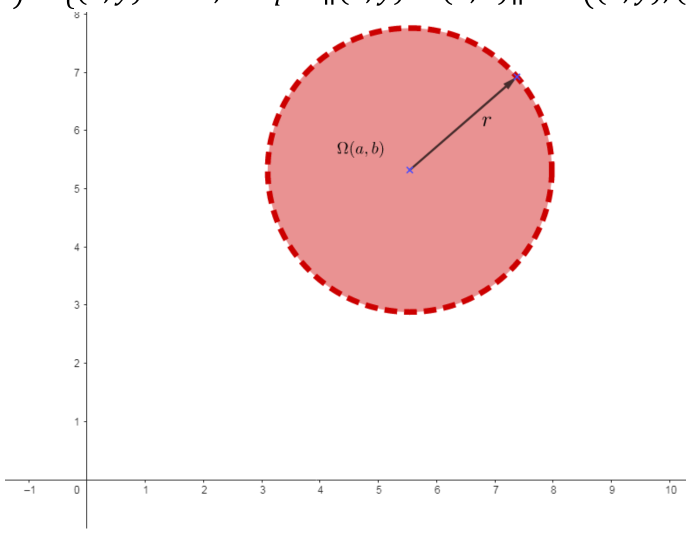
$$\forall (e_1, e_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, < e_1, e_2 > = \; x_1 x_2 + y_1 y_2$$
$$\forall e = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \|e\| = \sqrt{< e, e >} = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\forall (e_1, e_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, d(e_1, e_2) = \|e_1 - e_2\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

I) Ouvert de $\mathbb{R}^2$

a) Boules ouvertes de $\mathbb{R}^2$

Définition : Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$. On appelle la boule ouverte de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon r, noté $\mathcal{B}\big((a, b), r\big)$ ou $\mathcal{B}_o\big((a, b), r\big)$, l'ensemble suivant :

$$\mathcal{B}_o\big((a, b), r\big) = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, tel\ que\ \|(x, y) - (a, b)\| = d\big((x, y), (a, b)\big) < r\big\}$$



Exemple I.a.1 : Dessiner $\mathcal{B}_o\big((-2,3), 5\big)$

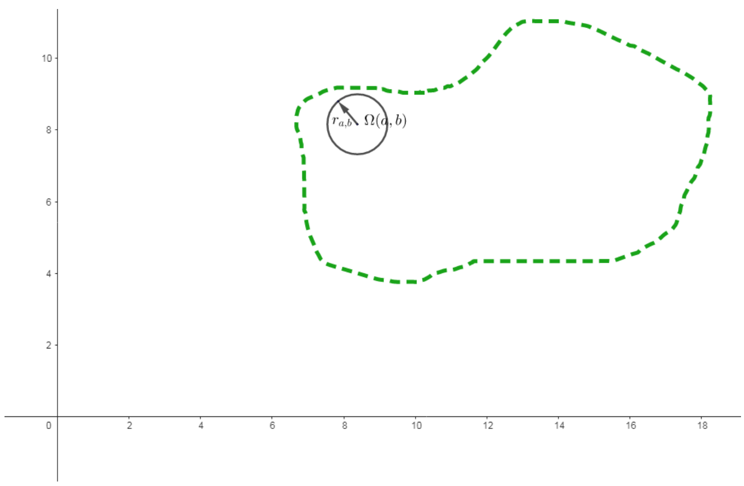
Remarque : Lorsque l'on a une inégalité large, on dit que la boule est fermée (c'est l'adhérence de la boule ouverte) :

$$\overline{\mathcal{B}_o\big((a, b), r\big)} = \mathcal{B}_f\big((a, b), r\big) = \mathcal{B}_o\big((a, b), r\big) = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, tel\ que\ \|(x, y) - (a, b)\| = d\big((x, y), (a, b)\big) < r\big\}$$

b) Ouvert de $\mathbb{R}^2$

Définition : Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$. On dit que A est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (ou une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$) lorsque :

$$\forall (a, b) \in A, \exists r_{a,b} > 0, tel\ que\ \mathcal{B}_o\Big((a, b), r_{a,b}\Big) \subset A$$



Exemple I.b.1 : On pose : $A =]-1; 2[\times]3,4[$.
Montrer que A est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Exemple I.b.2 : On pose $B = [-2; 1[\times]1,2[$.
Montrer que B n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Exemple I.b.3 : On pose $f:(x,y) \mapsto \ln(x-y^2)$. Démontrer que l'ensemble de définition de f est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Propriété I.b.4 : Une boule ouverte de $\mathbb{R}^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

II) Fonction d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$ à valeur dans $\mathbb{R}$

a) Une surface représentative

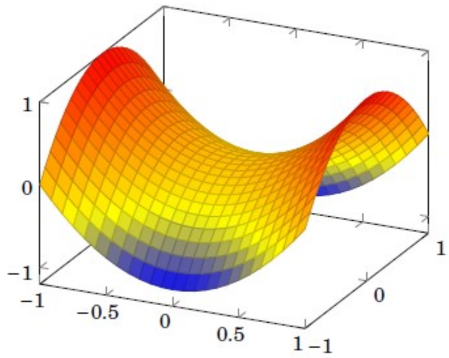
Définition : Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f: U \to \mathbb{R}$ une application. On définit sa courbe représentative, notée $\mathcal{C}_f$, par :

$$\mathcal{C}_f = \{(x,y,f(x,y)),(x,y) \in U\}$$

Exemple II.a.1 : On pose :

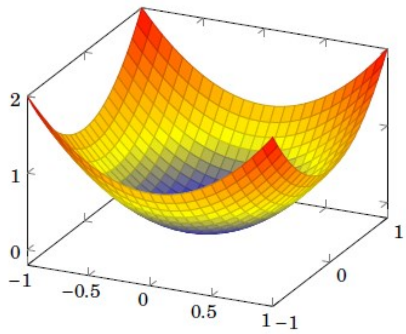
$$f:\begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto 3 \end{cases}$$

Déterminer $\mathcal{C}_f$.



Exemple II.a.2 : On pose :

$$f:\begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x^2-y^2 \end{cases}$$



Exemple II.a.3 : On pose :

$$f:\begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x^2+y^2 \end{cases}$$

b) Limite et continuité

Définition (limite) : Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f: U \to \mathbb{R}$. On dit que f admet une limite ℓ en (a,b) si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta_\epsilon > 0 \; tel\ que\ , \forall (x,y) \in U \; avec\ \|(x,y)-(a,b)\| \leq \eta_\epsilon, |f(x,y)-\ell| \leq \epsilon$$

Notation : Si f admet une limite ℓ en (a,b), on note :

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \ell$$

Exemple II.b.1 : On pose :

$$f:\begin{cases} (\mathbb{R}^*)^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \dfrac{3x^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

Montrer que f admet une limite finie en $(0;0)$.

Définition (Continuité en un point) : Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f: U \to \mathbb{R}$. On dit que f est continue en (a,b) si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta_\epsilon > 0 \; tel\ que\ , \forall (x,y) \in U \; avec\ \|(x,y)-(a,b)\| \leq \eta_\epsilon, |f(x,y)-f(a,b)| \leq \epsilon$$

Notation : Si f admet une limite ℓ en (a,b), on note :

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

Exemple II.b.2 : On pose :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} \ si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0\ sinon \end{cases} \end{cases}$$

f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?

Définition (continuité en tout point) : Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f: U \to \mathbb{R}$. On dit que f est continue sur U si f est continue en tout point (a,b) de U

Application II.b.3 : Soit $f: (x,y) \mapsto y$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Propriété II.b.4 : Soient U une ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$ et $f: U \to \mathbb{R}, g: U \to \mathbb{R}$ deux applications continues sur U.

- Toute combinaison linéaire de f et g est continue sur U
- Le produit $f \times g$ est continue sur U
- Le quotient $\frac{f}{g}$ est continue là où g ne s'annule pas
- Si $\varphi: I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ avec $f(U) \subset I$, alors $\varphi o f$ est continue sur U

Remarque : Une fonction polynomiale de $\mathbb{R}^2$ est une combinaison linéaire de fonctions de la forme $(x,y) \mapsto x^n x^m$, avec $(n,m) \in \mathbb{N}^2$.
D'après la propriété II.b.4, toute fonction polynomiale de $\mathbb{R}^2$ est continue.