Chapitre 30 – Fonctions de deux variables
Partie C : Etude de l'évolution d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

Dans toute cette partie, U désigne un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et f une fonction de U dans $\mathbb{R}$: $f: U \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$.

I) Plus difficile que dans $\mathbb{R}$

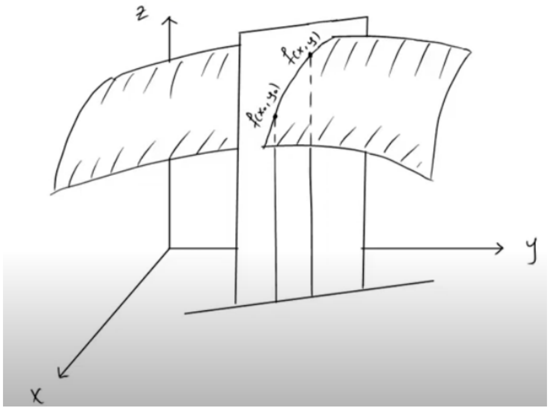
a) Dérivée directionnelle

Remarque : Pour les fonctions définies et dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, s'intéresser à leur « vitesse » d'évolution à un instant t de I revient à s'intéresser au nombre dérivée $f'(t)$. Pour les fonctions de deux variables, cela est plus complexe car la fonction évolue suivant une infinité de direction ! On a donc besoin de définir une dérivée directionnelle pour étudier l'évolution de f suivant cette direction.

Définition : On dit que $f \in \mathcal{C}^1(U)$ admet une dérivée directionnelle en (a,b) dans la direction (u,v) lorsque la fonction $\varphi_{u,v}: t \mapsto f(a+t\times u, b+t\times v)$ est dérivable en 0. Dans ce cas on note $D_{(u,v)}f(a,b) = \varphi'_{u,v}(0)$:

$$D_{(u,v)}f(a,b) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+t\times u, b+t\times v) - f(a,b)}{t}$$

Remarque : Si on considère l'intersection de la surface $z = f(x,y)$ avec le plan dirigé par $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix}$ qui passe par $A\big(a,b,f(a,b)\big)$, cela donne la courbe représentative d'une fonction d'une variable réelle, et on peut voir la dérivée directionnelle $D_{(u,v)}f(a,b)$ comme la pente en 0 de cette courbe représentative.



Propriété I.a.1 : f admet une dérivée directionnelle en (a,b) dans la direction $(1,0)$, $resp$ $(0,1)$, si et seulement si f admet une dérivée partielle par rapport à la première variable, resp deuxième variable et :

$$D_{(1,0)}f(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b), resp \quad D_{(0,1)}f(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

Exemple I.a.2 : On pose :

$$f: (x,y) \mapsto \ln(1+x^2+y^2)$$

Déterminer $D_{(2,3)}f(x,y)$.

b) Règle de la chaine

Théorème I.b.1 (règle de la chaine) : Soient $f \in \mathcal{C}^1(U)$, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(x,y) \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ tel que :

$$\forall t \in I, \big(x(t), y(t)\big) \in U$$

On pose :

$$g: \begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ t \mapsto f\big(x(t), y(t)\big) \end{cases}$$

Alors $g \in \mathcal{C}^1(I)$ et :

$$\forall t \in I, g'(t) = x'(t) \times \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t), y(t)\big) + y'(t) \times \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t), y(t)\big)$$

Exemple I.b.2 : On pose : $f: (x,y) \mapsto \ln(1+x^2) \times \arctan(x+y^3)$. On pose $g(t) = f\big(\cos(t), \sqrt{t}\big)$.
Montrer que $g \in \mathcal{C}^1(]0;+\infty[)$ et déterminer g'.

Application I.b.3 : Réécrire la règle de la chaine à l'aide du gradient.

> ***Corollaire I.b.4*** : Soit $f \in \mathcal{C}^1(U)$. Alors $\forall (a,b) \in U^2, \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, D_{(u,v)}f(a,b)$ existe et :
> $$\forall (a,b) \in U^2, \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, D_{(u,v)}f(a,b) =< \nabla f(a,b); (uv) >$$

Application I.b.5 : Démontrer que $\nabla f(a,b)$ définit la direction dans laquelle f croît le plus vite.

c) Changement de variable sur $\mathbb{R}^2$

> **Propriété I.c.1 (changement de variable sur $\mathbb{R}^2$)** : Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$, $f \in \mathcal{C}^1(U), (x,y) \in \mathcal{C}^1(V)^2$ tel que : $\forall (u,v) \in V^2, \big(x(u), y(v)\big) \in U$. On a alors :
> $$g: \begin{cases} V \to \mathbb{R} \\ (u,v) \mapsto f\big(x(u,v), y(u,v)\big) \end{cases}$$
> Est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V et :
> $$\begin{cases} \partial_1 g(u,v) = \partial_1 x(u,v) \times \partial_1 f\big(x(u,v), y(u,v)\big) + \partial_1 y(u,v) \times \partial_2 f\big(x(u,v), y(u,v)\big) \\ \partial_2 g(u,v) = \partial_2 x(u,v) \times \partial_1 f\big(x(u,v), y(u,v)\big) + \partial_2 y(u,v) \times \partial_2 f\big(x(u,v), y(u,v)\big) \end{cases}$$

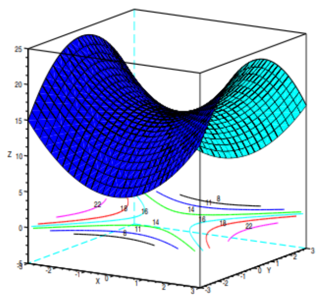
Application I.c.2 : Déterminer une matrice $J_f(u,v) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tel que :
$$\nabla g = J_f(u,v) \times \nabla f$$
Cette matrice s'appelle la matrice jacobienne !

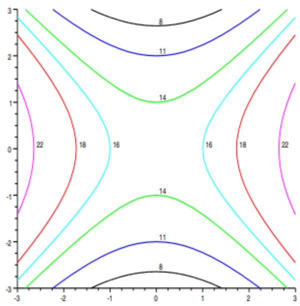
Application I.c.3 (coordonnées polaire) : Dans $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique, on considère un point de coordonnées $A(x,y) = A[r,\theta]$ où $[r,\theta]$ désigne les coordonnées polaire de A. On pose $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ et g tel que :
$$g(r,\theta) = f\big(rcos(\theta), rsin(\theta)\big)$$
Exprimer ∇f en fonction de ∇g.

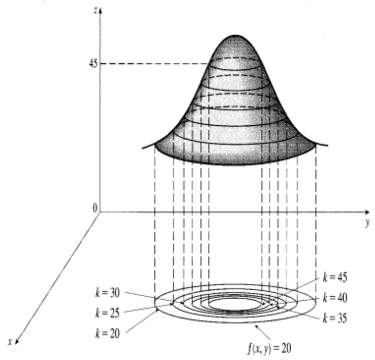
II) Ligne de niveau et point critique

a) Ligne de niveau

Définition : Soit $f \in \mathcal{C}^1(U)$. On appelle ligne de niveau λ de f l'ensemble :
$$\mathcal{L}_\lambda = \{(x,y) \in U \; tel \; que \; f(x,y) = \lambda\}$$







Exemple II.a.1 : On pose $f: (x,y) \mapsto x^2 + y^2$. Déterminer $\mathcal{L}_4$.

Exemple II.a.2 : On pose $f: (x,y) \mapsto e^{x^2 \times y}$. Déterminer $\mathcal{L}_3$.

Propriété II.a.3 : Soit $\mathcal{L}_\lambda$. On a alors il existe I intervalle de $\mathbb{R}$ et $\gamma \in \mathcal{C}^1(I;\mathbb{R}^2)$ tel que
$$\forall (x,y) \in \mathcal{L}_\lambda, \exists t_{x,y} \in I, \gamma\left(t_{x,y}\right) = (x,y)$$
On a alors :
$$< \nabla f\left(\gamma(t_{x,y})\right); \gamma'\left(\mathrm{t}_{x,y}\right) > \; = 0$$
On dit alors que le gradient est orthogonal aux lignes de niveau.

b) Point critique

Définition (extremum) : On dit que f admet un maximum global, resp minimum global, en (a,b) si et seulement si :
$$\forall (x,y) \in U, f(x,y) \leq f(a,b), resp\ f(x,y) \geq f(a,b)$$
De même on dit que f admet un maximum local, resp minimum local, en (a,b) si et seulement si :
$$\exists r > 0\ tel\ que\ \forall (x,y) \in U \cap B_0\big((a,b),r\big), f(x,y) \leq f(a,b), resp\ f(x,y) \geq f(a,b)$$

Exemple II.b.1 : On pose
$$f : (x,y) \mapsto x^2 + \frac{2}{3}xy + \frac{10}{9}y^2$$
Montrer que f admet un minimum global en $(0;0)$. f admet-elle un maximum global ?

Propriété II.b.2 (Condition nécessaire) : Si f admet un extremum local en (a,b), alors :
$$\nabla f(a,b) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Application II.b.2 : Déterminer les extrema locaux ou globaux de
$$f : (x,y) \mapsto y^2 - x^2 + \frac{x^4}{2}$$

Définition (point critique) : On dit que (a,b) est un point critique si :
$$\nabla f(a,b) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$