TD 30 : Fonction de deux variables

Partie A : Ouvert de $\mathbb{R}^2$

Exercice A.1 : Représenter l'ensemble de définition des fonctions suivantes, puis montrer que ce sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$:

$$f_1 : (x, y) \mapsto \ln(2x + y - 2)\,, f_2 : (x, y) \mapsto \sqrt{1 - xy}, f_3 : (x, y) \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}} + \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

Partie B : Continuité

Exercice B.1 : On pose :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \; si\ (x, y) \neq (0; 0) \\ 0\ sinon \end{cases} \end{cases}$$

$f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$?

Exercice B.2 : On pose :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \begin{cases} (x + y) \sin\left(\dfrac{1}{x^2 + y^2}\right) \; si\ (x, y) \neq (0; 0) \\ 0\ sinon \end{cases} \end{cases}$$

$f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$?

Exercice B.3 : On pose :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \; si\ (x, y) \neq (0; 0) \\ 0\ sinon \end{cases} \end{cases}$$

$f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$?

Partie C : Dérivées partielles

Exercice C.1 : On pose $f(x, y) = \ln(x - y^2)$

1) Donner l'ensemble de définition de f.
2) Déterminer le développement limité de f à l'ordre 1 en $(3; 1)$.
3) Déterminer l'équation du plan tangent à la surface représentative de f en $(3{,}1)$.

Exercice C.2 : On pose :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x \times y}{x^2 + y^2} \; si\ (x, y) \neq (0; 0) \\ 0\ sinon \end{cases} \end{cases}$$

1) Etudier la continuité de f en $(0{,}0)$.
2) Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0; 0)$.

Exercice C.3 : On pose :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2 \times y}{x^4 + y^4} \; si\ (x, y) \neq (0; 0) \\ 0\ sinon \end{cases} \end{cases}$$

1) Etudier la continuité de f en $(0{,}0)$.

2) Montrer que f admet des dérivées directionnelles en $(0;0)$ dans toutes les directions.

Exercice C.4 : Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$. On pose :

$$g:\begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \displaystyle\int_x^y f(t)dt \end{cases}$$

Montrer que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$.

Partie D : Lignes de niveau et extréma

Exercice D.1 : Représenter les lignes de niveau pour :

$$f_1(x,y) = y^2, avec\ k = -1\ et\ k = 1$$

$$f_2(x,y) = \frac{x^4 + y^4}{8 - x^2 - y^2}\ avec\ k = 2$$

$$f_3(x,y) = x + y - 1\ avec\ k \in \mathbb{R}$$

$$f_4(x,y) = e^{x-y^2}\ avec\ k \in \mathbb{R}$$

Exercice D.2 : Etudier les extrema locaux de :

$$f_1 : (x,y) \mapsto x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y, \quad f_2 : (x,y) \mapsto 2y^4 - 3xy^2 + x^2, f_3 : (x,y) \mapsto x^3 - y^2 - x$$

Exercice D.3 : Etudier les extrema locaux de :

$$f:\begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto xe^y + ye^x \end{cases}$$

Exercice D.4 : On considère l'équation aux dérivées partielles :

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Où $f \in \mathcal{C}^1(]0;+\infty[\times \mathbb{R})$. On va chercher l'expression des solutions.
Pour cela on va raisonner par analyse-synthèse et faire un changement de variable.
1) Montrer que :

$$\varphi:\begin{cases}]0;+\infty[\times \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\to]0;+\infty[\times \mathbb{R} \\ (r;\theta) \mapsto (r \times \cos(\theta)\,; r \times \sin(\theta)) \end{cases}$$

Est une bijection et déterminer φ^{-1}.
Analyse :
Soit f une solution de (E) sur $U =]0;+\infty[\times \mathbb{R}$. On note $V =]0;+\infty[\times \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. On pose :

$$g(r,\theta) = f\big(\varphi(r,\theta)\big) = f\big(rcos(\theta), rsin(\theta)\big)$$

2) Déterminer les dérivées partielles de g.
3) En déduire qu'il existe $\psi \in \mathcal{C}^1\left(\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right)$ tel que $\forall (r,\theta) \in V, g(r,\theta) = \psi(\theta)$
4) En déduire une expression de f.
Synthèse :
5) Déterminer l'ensemble des solutions de (E).