Chapitre IV : Fonctions usuelles
Partie A : Fonctions exponentielle, logarithme et puissance

I) La fonction exponentielle

a) Existence et unicité

Propriété I.a.1 : Il existe une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Propriété I.a.2 : Soit f une telle fonction. On a alors :
On a alors :
a) **Propriété 1** : $\forall$ x $\in \mathbb{R}$, $f(x)f(-x) = 1$.
b) **Propriété 2** : f est toujours strictement positive.
c) **Propriété 3** : f est unique.

Définition : L'unique fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

est appelée la fonction exponentielle.
On la note : $\exp : \mathrm{x} \mapsto \exp(\mathrm{x})$.

b) Propriétés

Propriété I.b.1 : Pour tout réel a et b, et pour tout entier relatif n on a :

1) $\exp(\mathrm{a}+\mathrm{b}) = \exp(\mathrm{a})\exp(\mathrm{b})$ 3) $\exp(\mathrm{na}) = (\exp(\mathrm{a}))^{\mathrm{n}}$

2) $\exp(\mathrm{a}-\mathrm{b}) = \dfrac{\exp(\mathrm{a})}{\exp(\mathrm{b})}$ 4) $\exp(-\mathrm{b}) = \dfrac{1}{\exp(\mathrm{b})}$

Définition : On peut calculer grâce à la méthode d'Euler que $\exp(1) \approx 2{,}72$. Ce nombre se note e (en hommage à Leonhard Euler). On notera dans toute la suite $\mathrm{e}^{\mathrm{x}} = \exp(\mathrm{x})$

Application I.b.2 : Simplifier les expressions suivantes :

1) $f(x) = (e^x)^3 e^{2x}$ $g(x) = \dfrac{e^{x-1}}{e^{x+1}}$ $h(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x}$

c) Variations

Propriété I.c.1 : La fonction exponentielle est strictement croissante sur l'ensemble des réels.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
e	$\nearrow$	1	$\nearrow$

Corollaire I.c.2 : La fonction exp est injective sur $\mathbb{R}$:

$$\forall\, (\mathrm{a},\mathrm{b}) \in \mathbb{R}^2, \mathrm{e}^{\mathrm{a}} = \mathrm{e}^{\mathrm{b}} \Leftrightarrow \mathrm{a} = \mathrm{b}$$

Application I.c.3 : Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{2x} + e^x - 2 = 0$

Corollaire I.c.4 :

$$\forall\, (a,b) \in \mathbb{R}^2, e^a \geq e^b \Leftrightarrow a \geq b$$

Application I.c.5 : Résoudre sur ℝ les inéquations suivantes :

$$e^{-x^2+3x-2} \leq 1 \; et \quad \frac{e^x+2}{e^x-1} > 0$$

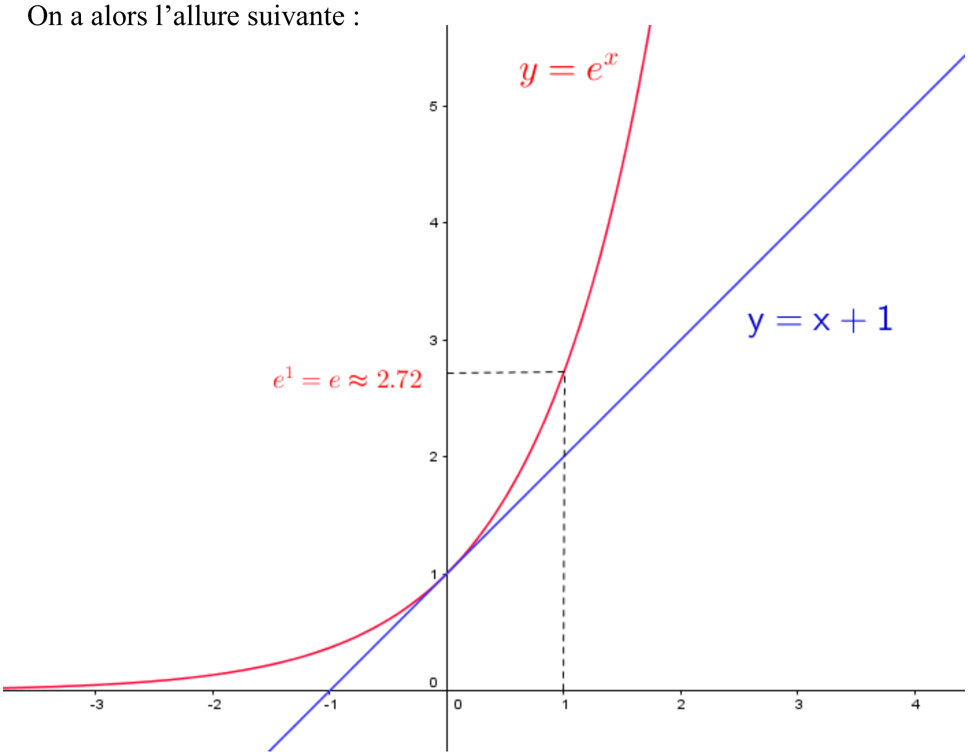
d) Limites

Proposition I.d.1 : On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \; et \; \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
e	0 ↗	1	↗ $+\infty$

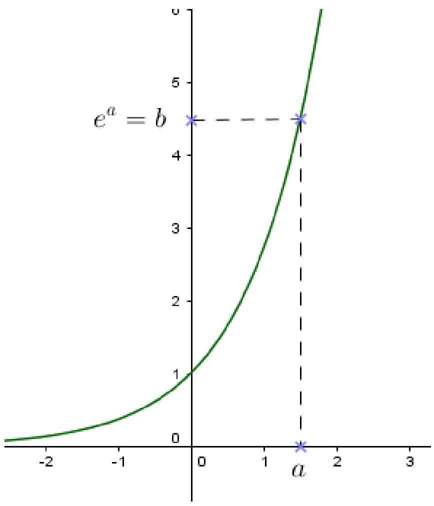
On a alors l'allure suivante :



Remarque : La fonction exponentielle est continue (car dérivable, nous verrons cela dans un prochain chapitre) et strictement croissante de ℝ dans]0 ;+∞[. Elle définit donc une bijection de ℝ dans]0 ;+∞[. Nous allons étudier à présent sa bijection réciproque.

II) La fonction logarithme népérien

a) La réciproque de l'exponentielle



Définition : On sait que la fonction exponentielle est **continue**, **strictement croissante** sur ℝ et à valeurs dans]0 ;+ ∞[.Ainsi pour tout nombre réel b>0 , il existe un **unique** nombre réel a tel que : $e^a = b$

$$exp : \begin{cases} \mathbb{R} \to]0 ; +\infty[\\ a \;\; \mapsto \;\; e^a = b \end{cases}$$

Définition : Il existe alors une unique fonction f tel que, pour tout b $\in$]0 ; + ∞[,
f(b) = a.
On note cette fonction logarithme népérien de b et on note $\ln(b) = a$.

On a donc :

$$\forall\, b > 0, \exists!\, a \in \mathbb{R}, a = ln(b) <=> \; e^a = b$$
$$exp^{-1} = ln$$

Application II.a.1 : Résoudre l'équation suivante : $e^{2x} - 8e^{x} + 12 = 0$

Propriété II.a.2: $\forall\ (a, b) \in \mathbb{R}_+^*, \forall\ y \in \mathbb{R}$,

1) $ln(ab) = ln(a) + ln(b)$ 2) $ln\left(\frac{a}{b}\right) = ln(a) - ln(b)$ 3) $ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\,ln(a)$ 4) $ln(a^{y}) = y\,ln(a)$

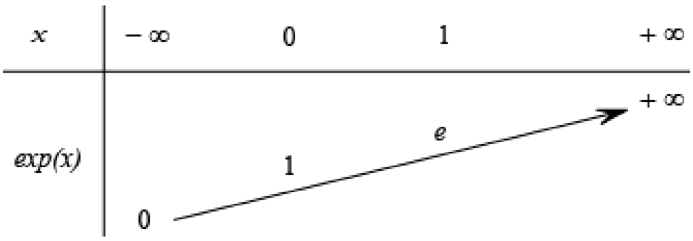
Exemple II.a.3 : Simplifier l'expression :

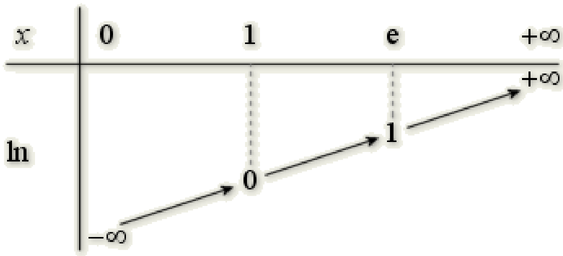
$$A = ln\left(\frac{1}{3}\right) + 2\,ln(\sqrt{3})$$

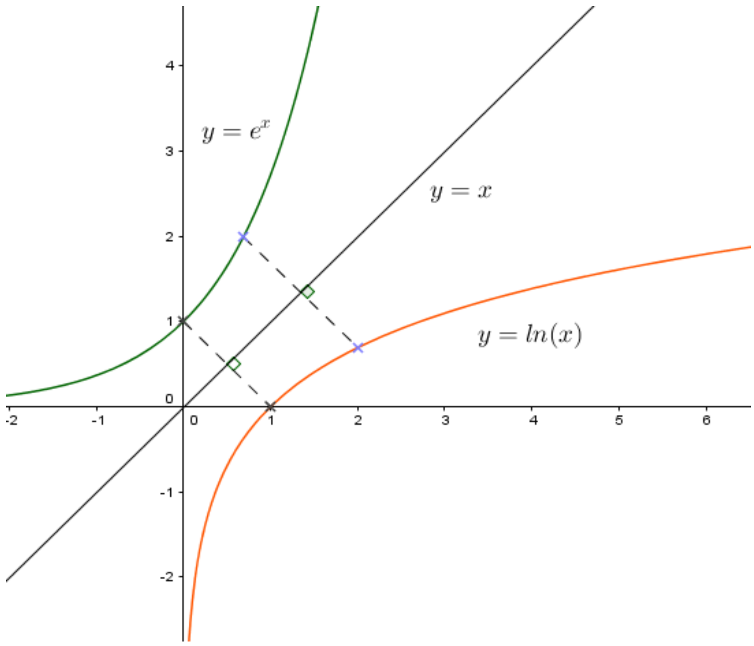
Application II.a.4 : Résoudre sur $\mathbb{R}$: $a)$ $2^{x} = 2048$ *b)* $3^{x} > 5237$

b) Variations, limites aux bornes et courbes

Propriété II.b.1 :







c) La fonction logarithme décimale

Remarque : Soit a>0. Dans certains domaines (scientifique ou autre), on utilise des fonctions logarithmes de base a, qui sont définie comme ceci :

$$\forall\ x > 0, \log_{a}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

Ainsi on a défini le logarithme en base 10 comme ci-après :

$$\forall\ x > 0, \log_{10}(x) = \log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

Ce qui nous permet notamment de résoudre des équations où l´inconnu est dans une puissance de 10.

Application II.c.1 : On sait qu´une solution contient $1{,}7 \times 10^{-3}$ mol.L^{-1} ion oxonium H_3O^{+}, notée $[H_3O^{+}]$. Déterminer le pH de cette solution sachant que : $10^{-pH} = [H_3O^{+}]$.

III) Les fonctions puissances

a) Une définition pour α réel

Définition :

- Si $\alpha = n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, x^n = \underbrace{x \times x \times \dots \times x}_{n \text{ fois}} = \prod_{k=1}^{n} x$$

Donc $x \longmapsto x^n$ est définit sur $\mathbb{R}$.

- Si $\alpha = n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*, x^{-n} = \frac{1}{x^n} = \frac{1}{\underbrace{x \times x \times \dots \times x}_{n \text{ fois}}}$$

Donc $x \longmapsto x^{-n}$ est définit sur $\mathbb{R}^*$.

- Si $\alpha = 0$, on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*, x^0 = 1$$

- Pour toutes les autres valeurs de α réel. On définit alors :

$$p_\alpha : \begin{cases}]0;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)} \end{cases}$$

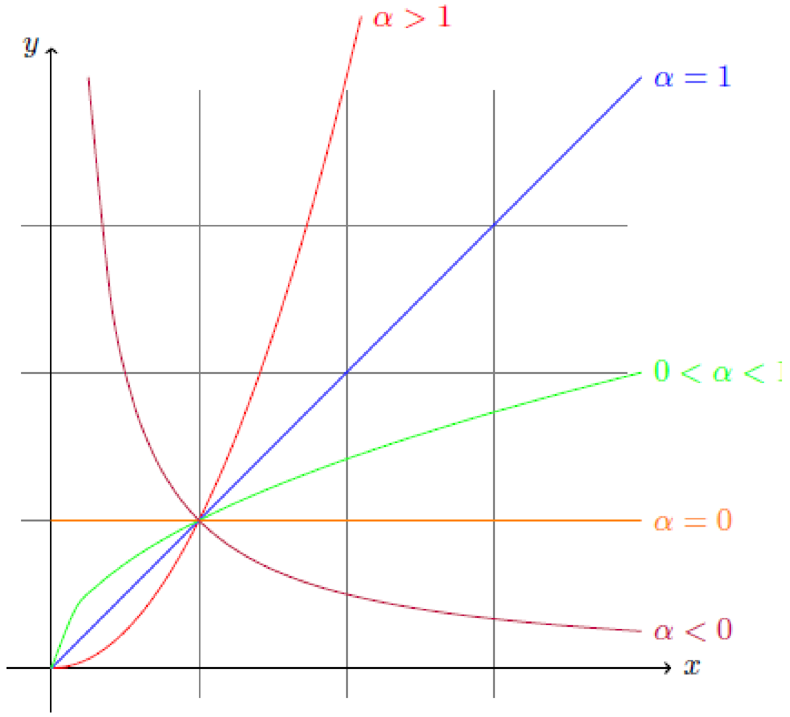
Exemple III.a.1 : Ecrire la fonction suivante sous forme exponentielle :

$$p_{0,4} : \begin{cases}]0;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^{0,4} \end{cases}$$

b) Variations

Propriété III.b.1 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. $p_\alpha : x \longmapsto x^\alpha$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et :

$$\forall\, x \in]0;+\infty[, p_\alpha{}'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$$



Application III.b.2 : La fonction p_α est strictement monotone sur $]0;+\infty[$.
On a alors les allures suivantes :

- 1[er] cas : $\alpha > 0$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty \end{cases}$$

- 2[ième] cas : $\alpha < 0$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 0 \end{cases}$$

c) Propriété et croissances comparées

Propriété III.c.1 : On a :

$$\forall\,(x,y) \in]0;+\infty[, \forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R} : \begin{cases} x^{\alpha} \times x^{\beta} = x^{\alpha+\beta} \\ (xy)^{\alpha} = x^{\alpha}y^{\alpha} \\ (x^{\alpha})^{\beta} = x^{\alpha\times\beta} \\ \dfrac{1}{x^{\beta}} = x^{-\beta} \end{cases}$$

Propriété III.c.2 (Croissance comparée) : $\forall(\alpha,\beta) \in (\mathbb{R}^{*+})^2$:

$$(1)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{[\ln(x)]^{\alpha}}{x^{\beta}} = 0 \quad (2)\ \lim_{x\to 0} x^{\beta}|\ln(x)|^{\alpha} = 0 \quad (3)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^{x})^{\alpha}}{x^{\beta}} = +\infty \quad (4)\ \lim_{x\to-\infty} |x|^{\beta}(e^{x})^{\alpha} = 0$$

Application III.c.3 : Déterminer les limites suivantes :

$$\ell_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x+1}{e^{3x}+3};\quad \ell_2 = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{2x};\ \ell_3 = \lim_{x\to 1^+} \ln(x)\ln(\ln(x)) \quad ; \quad \ell_4 = \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$$

Remarque : Pour étudier une fonction du type $u(x)^{v(x)}$ il convient de transformer cette fonction de la forme :

$$u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln(u(x))}$$

Application III.c.4 : Etudier la fonction :

$$f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$$

IV) Les fonctions cosinus et sinus hyperboliques

a) Décomposition d'exponentielle

Proposition IV.a.1 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ centré en 0. Alors il existe un unique couple (f_p,f_i) de fonctions définie sur I à valeur dans $\mathbb{R}$ tel que :

1) $f = f_p + f_i$
2) f_p est paire
3) f_i est impaire

Remarque : On applique cela à la fonction exponentielle :

Définition :

- On appelle fonction **cosinus hyperbolique** la partie paire de la fonction exponentielle :

$$\forall x \in \mathbb{R}, ch(x) = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$$

- On appelle fonction **sinus hyperbolique** la partie impaire de la fonction exponentielle :

$$\forall x \in \mathbb{R}, sh(x) = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$$

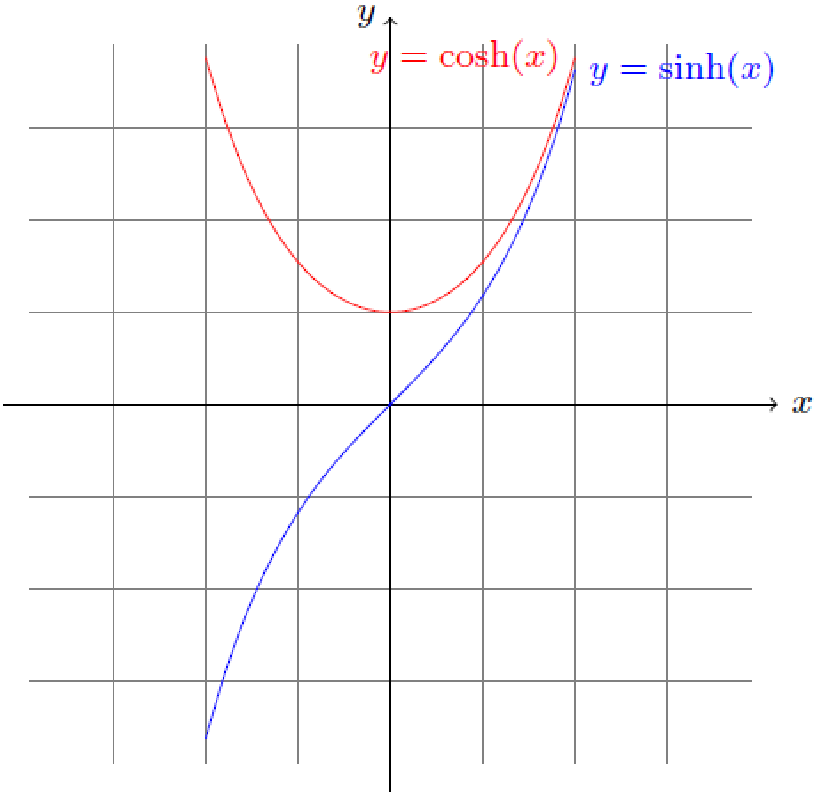
b) Propriétés et variation

Propriété IV.b.1 : On a bien évidemment :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \begin{cases} ch\,(x) + sh(x) = e^{x} \\ ch^2(x) - sh^2(x) = 1 \\ ch(x) - sh(x) = e^{-x} \end{cases}$$

Propriété IV.b.2 : La fonction ch est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout x réel : *ch'(x) = sh(x)*
La fonction sh est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout x réel : *sh'(x) = ch(x)*

$$\lim_{x \to +\infty} ch(x) = \lim_{x \to +\infty} sh(x) = +\infty$$



Remarque : On a une analogie avec les formules de cosinus et sinus :

$$\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2, ch\ (x + y) = ch(x)ch(y) + sh(x)sh(y)$$