Correction DS 1

Exercice 1: Recherche d'une limite

Le but de cet exercice est de déterminer :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$$

Dans toute la suite de cet exercice on pose la fonction f définie par :

$$f : t \mapsto \ln(1+t)-t$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

2) Démontrer que :

$$\forall t \geq 0, -\frac{t^2}{2} \leq f(t) \leq -\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}$$

3) En déduire la limite cherchée.

1) On sait que $\mathcal{D}_{ln} =]0;+\infty[$. On en déduit donc que :

$$\boxed{\mathcal{D}_f =]-1;+\infty[}$$

2) On va démontrer cette double inégalité en deux fois.

1er cas : Montrons que : $\forall t \geq 0, -\frac{t^2}{2} \leq f(t)$

On pose la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$g : t \mapsto \ln(1+t)-t+\frac{t^2}{2}$$

g est dérivable sur $[0;+\infty[$ et :

$$\forall t \geq 0, g'(t) = \frac{1}{1+t} - 1 + t = \frac{1+(t-1)(t+1)}{1+t} = \frac{t^2}{1+t} \geq 0$$

On en déduit donc que g est croissante sur $[0;+\infty[$.

De plus on a $g(0) = \ln(1) - 0 + \frac{0^2}{2} = 0$

On en déduit donc que :

$$\forall t \geq 0, g(t) \geq 0$$

On a donc :

$$\boxed{\forall t \geq 0, -\frac{t^2}{2} \leq f(t)}$$

2ième cas : Montrons que : $\forall t \geq 0, f(t) \leq -\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}$

On pose la fonction h définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$h : t \mapsto \ln(1+t)-t+\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3}$$

h est dérivable sur $[0;+\infty[$ et :

$$\forall t \geq 0, h'(t) = \frac{1}{1+t} - 1 + t - t^2 = \frac{1+(t-1)(t+1)-t^2(1+t)}{1+t} = \frac{-t^3}{1+t} \leq 0 \text{ (car } t \geq 0 \text{ donc } t^3 \geq 0)$$

On en déduit donc que h est décroissante sur $[0;+\infty[$.

De plus on a $h(0) = \ln(1) - 0 + \frac{0^2}{2} - \frac{0^3}{3} = 0$

On en déduit donc que :

$$\forall t \geq 0, h(t) \leq 0$$

On a donc :

$$\boxed{\forall t \geq 0, f(t) \leq -\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}}$$

3) On a :

$$\forall t \geq 0, -\frac{t^2}{2} \leq f(t) \leq -\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}$$

$$\Longrightarrow \forall t > 0, -\frac{1}{2} \leq \frac{\ln(1+t)-t}{t^2} \leq -\frac{1}{2}+\frac{t}{3}$$

Or on sait que :

$$\lim_{t\to 0^+}\left(-\frac{1}{2}+\frac{t}{3}\right)=-\frac{1}{2}$$

Donc d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que :

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=-\frac{1}{2}}$$

Exercice 2 : Démonstration d'une inégalité

Le but de cet exercice est de démontrer que on a :

$$\forall(x,y)\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]^2,\frac{|x+y|}{(x+y)^2+1}\leq\frac{|x|}{x^2+1}+\frac{|y|}{y^2+1}$$

1) Donner l'énoncé complet de l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$, avec les deux relations. (On ne demande pas de démonstration).

Dans toute la suite on définit la fonction g suivante :

$$g: t\mapsto\frac{t}{t^2+1}$$

2) Déterminer le domaine de définition de g.

3) Déterminer les variations de g sur son ensemble de définition.

4) Soit $(x,y)\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]^2$. Encadrer $|x+y|$ et $|x|+|y|$.

5) En déduire que :

$$\forall(x,y)\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]^2,\frac{|x+y|}{(x+y)^2+1}\leq\frac{|x|}{|x|^2+1}+\frac{|y|}{|y|^2+1}$$

1) On a :

$$\forall(x,x')\in\mathbb{R}^2,\big||x|-|x'|\big|\leq|x+x'|\leq|x|+|x'|$$

2) On sait que : $\forall t\in\mathbb{R}, t^2+1\geq 1\Longrightarrow t^2+1\neq 0\Longrightarrow \mathcal{D}_g=\mathbb{R}$

3) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables et :

$$\forall t\in\mathbb{R}, g'(t)=\frac{t^2+1-2t^2}{(t^2+1)^2}=\frac{1-t^2}{(t^2+1)^2}\geq 0$$

Ainsi $g'(t)$ est du signe de $1-t^2$ car le dénominateur est positif.

Or on sait que :

$$1-t^2\geq 0\Leftrightarrow t^2\leq 1\Leftrightarrow t\in[-1;1]$$

On a donc le tableau de variations suivant :

t	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
g		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

4) On a :

$$\forall(x,y)\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]^2\Longrightarrow\begin{cases}-\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\leq y\leq\frac{1}{2}\end{cases}\Longrightarrow -1\leq x+y\leq 1\Longrightarrow 0\leq|x+y|\leq 1$$

De même on a :

$$\forall (x,y) \in \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]^2 \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0 \leq |y| \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow 0 \leq |x| + |y| \leq 1$$

5) On sait que g est croissante sur $[0; 1]$ et que :

$$\forall (x,y) \in \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]^2, 0 \leq |x+y| \leq |x| + |y| \leq 1$$

On en déduit donc que :

$$g(0) \leq g(|x+y|) \leq g(|x|+|y|) \leq g(1) \text{ car g est croissante sur } [0;1]$$

Or on a :

$$g(|x+y|) = \frac{|x+y|}{(|x+y|)^2+1} = \frac{|x+y|}{(x+y)^2+1}$$

Remarque :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 = |x|^2$$

De plus on a :

$$g(|x|+|y|) = \frac{|x|+|y|}{(|x|+|y|)^2+1} = \frac{|x|}{(|x|+|y|)^2+1} + \frac{|y|}{(|x|+|y|)^2+1}$$

De plus on a :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}, (|x|+|y|)^2+1 = x^2+y^2+2|x||y|+1 \geq x^2+1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(|x|+|y|)^2+1} \leq \frac{1}{x^2+1} \text{ car } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ est décroissante sur }]0;+\infty[$$

De même :

$$\frac{1}{(|x|+|y|)^2+1} \leq \frac{1}{y^2+1}$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{\forall (x,y) \in \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]^2, \frac{|x+y|}{(x+y)^2+1} \leq \frac{|x|}{x^2+1} + \frac{|y|}{y^2+1}}$$

Exercice 3 : Tangentes communes

On définit $f: x \mapsto e^x$ et $g: x \mapsto \sqrt{x}$. On cherche à déterminer le nombre de tangentes communes à leurs courbes respectives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

1) Donner l'ensemble de définition de f et de g.

2) a) Pour $a \in \mathbb{R}$, on note $(T_a f)$ la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a. Déterminer l'équation de $(T_a f)$.

b) Dé même, pour $b \in \mathbb{R}^{*+}$, on note $(T_b g)$ la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse b.

3) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^{*+}$, on a :

$$(T_a f) \text{ et } (T_b g) \text{ sont confondues} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\ln(2) - \frac{1}{2}\ln(b) \\ b - \frac{1}{2}\ln(b) = 1 + \ln(2) \end{cases}$$

3) Pour $t > 0$, on pose :

$$u(t) = t - \frac{1}{2}\ln(t)$$

Déterminer le nombre de solutions de l'équation $u(t) = 1 + \ln(2)$

4) En déduire le nombre de tangentes communes à $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

1) On sait que $\boldsymbol{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}}$ **et** $\boldsymbol{\mathcal{D}_g =]0;+\infty[}$

2) a) On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x$$

On en déduit que :

$$(T_a f): y = f'(a)(x-a) + f(a) = e^a(x-a) + e^a = e^a x + e^a(1-a)$$

$$\boxed{\Rightarrow (T_a f): y = e^a x + e^a(1-a)}$$

b) On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

On en déduit que :

$$(T_b g): y = g'(b)(x-b) + g(b) = \frac{1}{2\sqrt{b}}(x-b) + \sqrt{b} = \frac{1}{2\sqrt{b}}x + \frac{\sqrt{b}}{2}$$

$$\boxed{\Longrightarrow (T_b g): y = \frac{1}{2\sqrt{b}}x + \frac{\sqrt{b}}{2}}$$

3) On en déduit donc que :

$$(T_a f)\ et\ (T_b g)\ sont\ confondues \Leftrightarrow \begin{cases} e^a = \dfrac{1}{2\sqrt{b}} \\ \dfrac{\sqrt{b}}{2} = e^a(1-a) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^a = \dfrac{1}{2\sqrt{b}} \\ \dfrac{\sqrt{b}}{2} = \dfrac{1}{2\sqrt{b}}(1-a) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\ln(2) - \dfrac{1}{2}\ln(b) \\ b = 1 - a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\ln(2) - \dfrac{1}{2}\ln(b) \\ b = 1 + \ln(2) + \dfrac{1}{2}\ln(b) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\ln(2) - \dfrac{1}{2}\ln(b) \\ b - \dfrac{1}{2}\ln(2) = 1 + \ln(2) \end{cases}$$

4) On sait que $\mathcal{D}_u =]0; +\infty[$. De plus u est dérivable sur $]0; +\infty[$ et :

$$\forall t > 0, u'(t) = 1 - \frac{1}{2t} = \frac{2t-1}{2t}$$

On en déduit donc que :

t	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2t-1$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

De plus on a :

$$u\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(\ln(2) + 1)$$

De plus on sait que :

$$\lim_{t \to 0^+} u(t) = +\infty$$

De plus on a :

$$\lim_{t \to +\infty} u(t) = \lim_{t \to +\infty} \left[t - \frac{1}{2}\ln(t)\right] = \lim_{t \to +\infty} t\left[1 - \frac{1}{2} \times \frac{\ln(t)}{t}\right]$$

Or on sait que :

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0\ (\boldsymbol{par\ croissance\ compar}\text{ée})$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{t \to +\infty} u(t) = +\infty$$

On a donc :

t	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2t-1$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}(1+ln(2))$	$\nearrow$	$+\infty$

On sait que :

$$\frac{1}{2}(1+\ln(2)) < 1+\ln(2)$$

On sait que u est :

- Continue sur $]0; 0{,}5]$
- Strictement décroissante sur $]0\,; 0{,}5]$

Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, u prend toutes les valeurs de $\left[\frac{1}{2}(1+\ln(2)); +\infty\right[$ une seule fois sur $]0\,; 0{,}5]$. Donc :

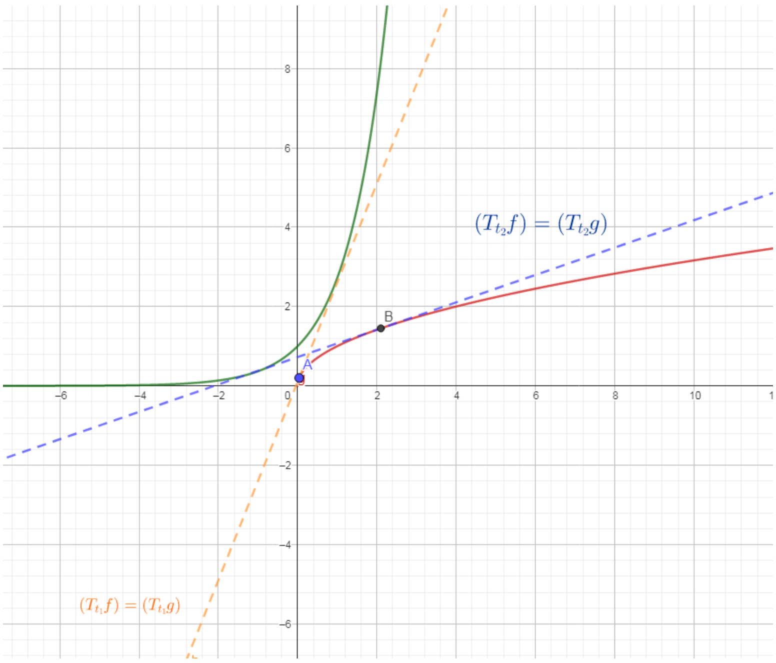
$$\boxed{\exists!\, \boldsymbol{t_1} \in]\mathbf{0\,;0,5}], \boldsymbol{tel\ que\ u(t_1) = 1+\ln(2)}}$$

De même on sait que u est :

- Continue sur $[0{,}5; +\infty[$
- Strictement croissante sur $[0{,}5; +\infty[$
- Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, u prend toutes les valeurs de $\left[\frac{1}{2}(1+\ln(2)); +\infty\right[$ une seule fois sur $[0{,}5; +\infty[$. Donc :

$$\boxed{\exists!\, \boldsymbol{t_2} \in [\mathbf{0,5}; +\infty[, \boldsymbol{tel\ que\ u(t_2) = 1+\ln(2)}}$$

5) On en déduit qu'il y a deux tangentes communes à $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, aux points d'abscisses t_1 et t_2.



Problème 1 : La fonction th

On rappelle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

On définit alors la fonction tangente hyperbolique, notée th, par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$$

Partie A : Une bijection

1) a) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$$

b) Montrer que th est impaire.

c) Déterminer les variations de th sur $\mathbb{R}$ et en déduire que th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1;1[$.

2) Résoudre $\mathrm{th}(x) = \frac{1}{2}$.

3) a) Montrer que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \mathrm{ch}(x+y) = \mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(y)$$

b) En déduire que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \mathrm{th}(x+y) = \frac{\mathrm{th}(x) + \mathrm{th}(y)}{1 + \mathrm{th}(x)\mathrm{th}(y)}$$

4) Tracer la courbe de la fonction th en y faisant apparaitre les éventuelles asymptotes, et la ou les solutions de l'équation $\mathrm{th}(x) = \frac{1}{2}$.

Partie B : Etude de la bijection

On pose la fonction $\mathrm{th}^{-1} = \mathrm{argth}$ la fonction réciproque de th.

1) Déterminer l'ensemble de définition de argth.

2) Déterminer les variations de argth sur son ensemble de définition.

3) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathcal{D}_{\mathrm{argth}}, \mathrm{argth}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

4) Démontrer que :

$$\forall\, x \in \mathcal{D}_{\mathrm{argth}}, \mathrm{argth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

5) Montrer que la fonction argth est impaire.

6) Tracer la courbe de la fonction th en y faisant apparaitre les éventuelles asymptotes.

Partie C : Une première application

On pose :

$$t : x \mapsto \mathrm{argth}\left(\sqrt{\frac{\mathrm{ch}(x) - 1}{\mathrm{ch}(x) + 1}}\right)$$

1) Vérifier que le domaine de définition de t est $\mathbb{R}$.

2) On pose $y = \mathrm{ch}(x)$. Vérifier que la fonction h définie par $h(y) = t(x)$ sécrit sous la forme :

$$h(y) = \frac{1}{2}\ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$$

3) En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, t(x) = \frac{|x|}{2}$$

Partie A : Une bijection

1) a) On a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{(e^x)^2 + 2e^x e^{-x} + (e^{-x})^2}{4} - \frac{(e^x)^2 - 2e^x e^{-x} + (e^{-x})^2}{4}$$
$$= \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 1$$

b) th est impaire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{th}(-x) = \frac{\mathrm{sh}(-x)}{\mathrm{ch}(-x)} = -\frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \mathrm{th}(x)$$

c) On sait que th $\in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ par quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{th}'(x) = \frac{\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} > 0$$

On en déduit donc que th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
De plus on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1$$

De plus th est impaire :
On en déduit donc que :

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{th}(x) = -1$$

On a donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$th'(x)$		$+$	
th	-1 $\nearrow$	0 $\nearrow$	1

On en déduit donc que :

- th est continue
- th est strictement croissante
- $f(\mathbb{R}) =]-1;1[$

Donc d'après le théorème de la bijection, th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1;1[$.

2) On a :

$$\mathrm{th}(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2(e^x - e^{-x}) - (e^x + e^{-x})}{2(e^x + e^{-x})} = 0 \Leftrightarrow e^x - 3e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = 3 \Leftrightarrow x = \ln\left(\sqrt{3}\right)$$

On en déduit donc que :

$$\mathrm{th}(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \ln\left(\sqrt{3}\right) = \frac{1}{2}\ln(3)$$

3) a) On a :

$$\begin{aligned}\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \mathrm{ch}\,(x+y) &= \frac{e^{x+y} + e^{-(x+y)}}{2} \\ &= \frac{e^x e^y + e^{-x}e^{-y}}{2}\end{aligned}$$

De plus on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(y) &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right) \\ &= \frac{e^{x+y} + e^{x-y} + e^{-x+y} + e^{-(x+y)}}{4} - \frac{e^{x+y} - e^{x-y} - e^{-x+y} + e^{-(x+y)}}{4} \\ &= \frac{e^x e^y + e^{-x}e^{-y}}{2} \\ &= \frac{e^{x+y} + e^{-(x+y)}}{2} \\ &= \mathrm{ch}\,(x+y)\end{aligned}$$

On a donc :

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \mathbf{ch}\,(x+y) = \mathbf{ch}(x)\mathbf{ch}(y) + \mathbf{sh}(x)\mathbf{sh}(y)}$$

b) On a :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\mathrm{th}(x) + \mathrm{th}(y)}{1 + \mathrm{th}(x)\mathrm{th}(y)} = \frac{\frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} + \frac{\mathrm{sh}(y)}{\mathrm{ch}(y)}}{1 + \frac{\mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(y)}{\mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(y)}} = \frac{\mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(y) + \mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(y)}{\mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(y)}$$

Or on a :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, \mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(y)+\mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(y)=\mathrm{ch}\,(x+y)$$

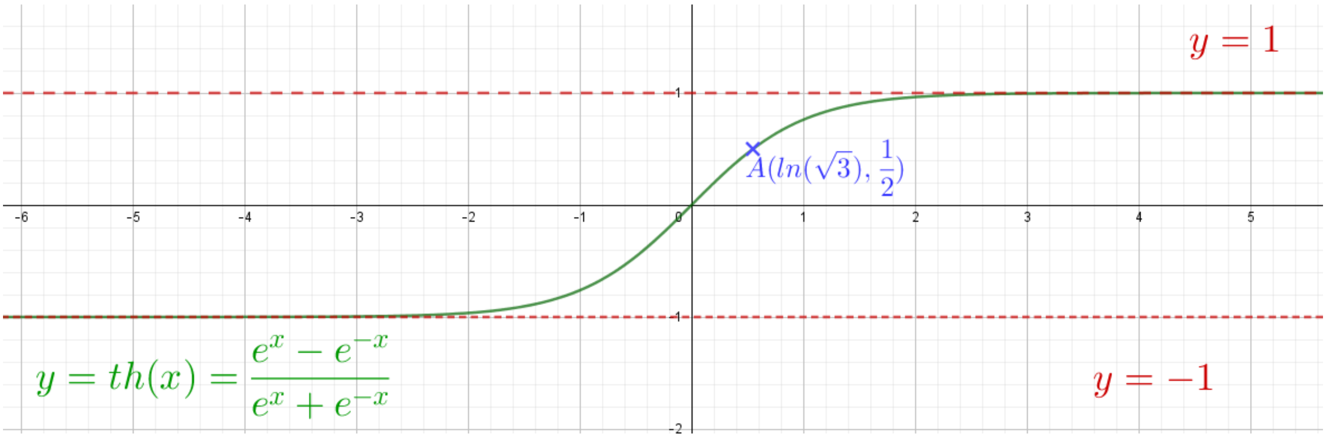
De même on a :

$$\begin{aligned}\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, \mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(y)+\mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(y) &= \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y+e^{-y}}{2}\right)+\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y-e^{-y}}{2}\right)\\ &= \frac{e^{x+y}+e^{x-y}-e^{-x+y}-e^{-(x+y)}}{4}+\frac{e^{x+y}-e^{x-y}+e^{-x+y}-e^{-(x+y)}}{4}\\ &= \frac{e^xe^y-e^{-(x+y)}}{2}\\ &= \frac{e^{x+y}-e^{-(x+y)}}{2}\\ &= \mathrm{sh}\,(x+y)\end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, \frac{\mathrm{th}(x)+\mathrm{th}(y)}{1+\mathrm{th}(x)\mathrm{th}(y)}=\frac{\mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(y)+\mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(y)}{\mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(y)+\mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(y)}=\frac{\mathrm{sh}\,(x+y)}{\mathrm{ch}\,(x+y)}=\mathrm{th}(x+y)}$$

4) On a la courbe suivante :



Partie B : Etude de la bijection

1) On sait que th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1;1[$ donc argth est définie sur $]-1;1[$.

2) On sait que th est croissante sur $\mathbb{R}$ donc argth aussi.

3) On a plusieurs méthodes à notre disposition :

Méthode 1 : Ce qu'il faut faire si on ne connait pas le résultat

Soit $y\in]-1;1[$. On résout :

$$\begin{aligned}&\mathrm{th}(x)=y\\ \Leftrightarrow\ &\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=y\\ \Leftrightarrow\ &e^x-e^{-x}=ye^x+ye^{-x}\\ \Leftrightarrow\ &e^{2x}-1=e^{2x}y+y\\ \Leftrightarrow\ &e^{2x}(1-y)=1+y\\ \Leftrightarrow\ &2x=\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)\ \text{car } y\in]-1;1[\\ \Leftrightarrow\ &x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)\end{aligned}$$

Méthode 2 : On compose

On calcule :

$$\forall x\in\mathbb{R}, \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\mathrm{th}(x)}{1-\mathrm{th}(x)}\right)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}}{1-\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}}\right)=\frac{1}{2}\ln(e^{2x})=x$$

Comme th est bijective on en déduit que :

$$\forall x\in]-1;1[, \mathrm{th}^{-1}(x)=\mathrm{argth}(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

4) Là encore on peut le faire de deux façons.

Méthode 1 : Avec la question précédente

$$\forall x \in]-1;1[, \operatorname{argth}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{2}\ln(1-x)$$

On en déduit donc que argth $\in \mathcal{D}(]-1;1[)$ et :

$$\forall x \in]-1;1[, \operatorname{argth}'(x) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2}\times\frac{-1}{1-x} = \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{1-x^2}$$

Méthode 2 : Avec la formule des dérivées composée

$$\forall x \in]-1;1[, \operatorname{argth}'(x) = \frac{1}{\operatorname{th}'(\operatorname{argth}(x))}$$

Or on sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{th}'(x) = \frac{\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} = 1 - \operatorname{th}^2(x)$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in]-1;1[, \operatorname{th}'(\operatorname{argth}(x)) = 1 - \operatorname{th}^2(\operatorname{argth}(x)) = 1 - x^2$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in]-1;1[, \operatorname{argth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

5) On sait que th est impaire. On a alors :

$$\forall x \in]-1;1[, \begin{cases} -\operatorname{th}(\operatorname{argth}(x)) = -x = \operatorname{th}(-\operatorname{argth}(x)) \\ \operatorname{th}(\operatorname{argth}(-x)) = -x \end{cases}$$

On en déduit donc que :

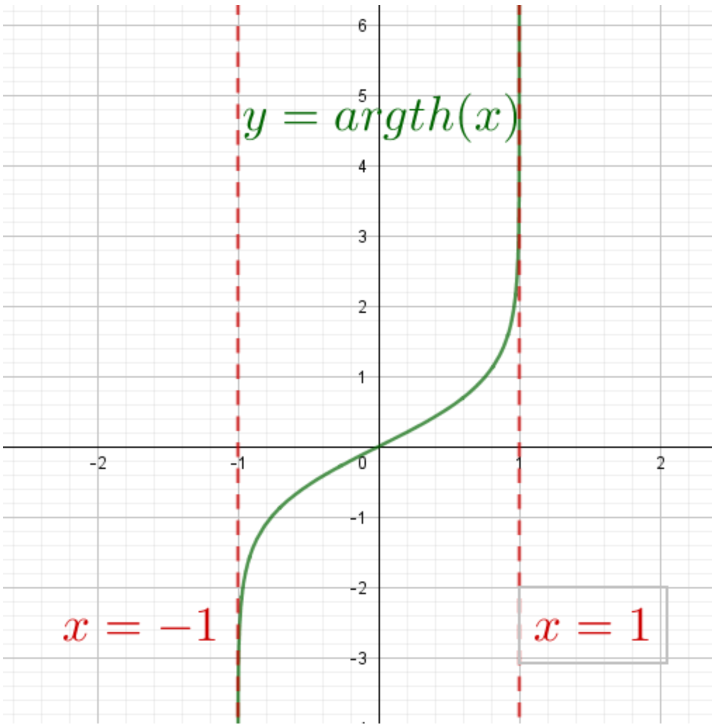
$$\forall x \in]-1;1[, \operatorname{th}(-\operatorname{argth}(x)) = \operatorname{th}(\operatorname{argth}(-x))$$

Comme th est bijective on en déduit donc que :

$$\forall x \in]-1;1[, -\operatorname{argth}(x) = \operatorname{argth}(-x)$$

Donc argth est impaire.

Remarque : On peut aussi le démontrer en étudiant la dérivée de $f: x \mapsto \operatorname{argth}(x) + \operatorname{argth}(-x)$



Partie C : Une première application

1) On doit vérifier que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq \frac{\operatorname{ch}(x) - 1}{\operatorname{ch}(x) + 1} < 1$$

On sait déjà que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}(x) \geq 1$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{\mathrm{ch}(x)-1}{\mathrm{ch}(x)+1} \geq 0$$

De plus on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{\mathrm{ch}(x)-1}{\mathrm{ch}(x)+1} = 1 - \frac{2}{\mathrm{ch}(x)+1} < 1$$

On en déduit donc que $\mathcal{D}_t = \mathbb{R}$.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y = \mathrm{ch}(x)$. On a alors :

$$t(x) = \mathrm{argth}\left(\sqrt{\frac{\mathrm{ch}(x)-1}{\mathrm{ch}(x)+1}}\right) = \mathrm{argth}\left(\sqrt{\frac{y-1}{y+1}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{\frac{y-1}{y+1}}+1}{1-\sqrt{\frac{y-1}{y+1}}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{y-1}+\sqrt{y+1}}{\sqrt{y+1}-\sqrt{y-1}}\right)$$

Or on sait que :

$$\forall y \in]-1;1[, \frac{\sqrt{y-1}+\sqrt{y+1}}{\sqrt{y+1}-\sqrt{y-1}} = \frac{\left(\sqrt{y-1}+\sqrt{y+1}\right)^2}{2} = \frac{y+1+y-1+2\sqrt{y^2-1}}{2} = y + \sqrt{y^2-1}$$

On en déduit donc que :

$$\forall y \in]-1;1[, h(y) = \frac{1}{2}\ln\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)$$

3) On sait que :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, t(x) &= \mathrm{argth}\left(\sqrt{\frac{\mathrm{ch}(x)-1}{\mathrm{ch}(x)+1}}\right)\\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\mathrm{ch}(x)+\sqrt{\mathrm{ch}^2(x)-1}\right)\\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\mathrm{ch}(x)+\sqrt{\mathrm{sh}^2(x)}\right)\\ &= \frac{1}{2}\ln(\mathrm{ch}(x)+|\mathrm{sh}(x)|)\end{aligned}$$

Or on sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\mathrm{sh}(x)| = \begin{cases} \mathrm{sh}(x) \text{ si } x \geq 0 \\ -\mathrm{sh}(x) \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, t(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\ln\big(\mathrm{ch}(x)+\mathrm{sh}(x)\big) = \frac{1}{2}\ln(e^x) = \frac{x}{2} \text{ si } x \geq 0 \\ \frac{1}{2}\ln\big(\mathrm{ch}(x)-\mathrm{sh}(x)\big) = \frac{1}{2}\ln(e^{-x}) = -\frac{x}{2} \text{ si } x < 0 \end{cases} = \frac{|x|}{2}$$