DS 1 - PCSI 2023-2024
Le 23 septembre 2023

On attachera la plus grande importance à la ***clarté*** *et à la* ***précision*** *de la rédaction, ainsi qu'à la* ***propreté*** *de la présentation, et on veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si on repère ce qui semble être une erreur d'énoncé, on pourra le signaler sur sa copie et poursuivre la composition, en expliquant les raisons de cette initiative.*

Les exercices et le problème sont indépendants et peuvent donc être traités dans ***n'importe quel ordre****. Au cours d'un exercice, lorsque l'on ne peut pas répondre à une question, il est* ***vivement recommandé*** *de poursuivre en admettant le résultat que la question demandait de démontrer.*

Durée : 4h. Ce sujet comporte ***2 pages****.* ***La calculatrice n'est pas autorisée****.*

Exercice 1: Recherche d'une limite

Le but de cet exercice est de déterminer :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$$

Dans toute la suite de cet exercice on pose la fonction f définie par :

$$f : t \mapsto \ln(1+t)-t$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

2) Démontrer que :

$$\forall t \geq 0, -\frac{t^2}{2} \leq f(t) \leq -\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}$$

3) En déduire la limite cherchée.

Exercice 2 : Démonstration d'une inégalité

Le but de cet exercice est de démontrer que on a :

$$\forall (x,y) \in \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]^2, \frac{|x+y|}{(x+y)^2+1} \leq \frac{|x|}{x^2+1}+\frac{|y|}{y^2+1}$$

1) Donner l'énoncé complet de l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$, avec les deux relations. (On ne demande pas de démonstration).

Dans toute la suite on définit la fonction g suivante :

$$g : t \mapsto \frac{t}{t^2+1}$$

2) Déterminer le domaine de définition de g.

3) Déterminer les variations de g sur son ensemble de définition.

4) Soit $(x,y) \in \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]^2$. Encadrer $|x+y|$ et $|x|+|y|$.

5) En déduire que :

$$\forall (x,y) \in \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]^2, \frac{|x+y|}{(x+y)^2+1} \leq \frac{|x|}{|x|^2+1}+\frac{|y|}{|y|^2+1}$$

Exercice 3 : Tangentes communes

On définit $f : x \mapsto e^x$ et $g : x \mapsto \sqrt{x}$. On cherche à déterminer le nombre de tangentes communes à leurs courbes respectives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

1) Donner l'ensemble de définition de f et de g.

2) a) Pour $a \in \mathbb{R}$, on note $(T_a f)$ la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a. Déterminer l'équation de $(T_a f)$.

b) Dé même, pour $b \in \mathbb{R}^{*+}$, on note $(T_b g)$ la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse b.

3) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^{*+}$, on a :

$$(T_a f)\ et\ (T_b g)\ sont\ confondues \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\ln(2) - \frac{1}{2}\ln(b) \\ b - \frac{1}{2}\ln(b) = 1 + \ln(2) \end{cases}$$

3) Pour $t > 0$, on pose :

$$u(t) = t - \frac{1}{2}\ln(t)$$

Déterminer le nombre de solutions de l'équation $u(t) = 1 + \ln(2)$

4) En déduire le nombre de tangentes communes à $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

Problème 1 : La fonction th

On rappelle les fonctions suivantes (appelées sinus hyperboliques et cosinus hyperboliques) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

On définit alors la fonction tangente hyperbolique, notée th, par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Partie A : Une bijection

1) a) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$$

b) Montrer que th est impaire.

c) Déterminer les variations de th sur $\mathbb{R}$ et en déduire que th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1;1[$.

2) Résoudre $\mathrm{th}(x) = \frac{1}{2}$.

3) a) Montrer que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \mathrm{ch}(x+y) = \mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(y)$$

b) En déduire que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \mathrm{th}(x+y) = \frac{\mathrm{th}(x) + \mathrm{th}(y)}{1 + \mathrm{th}(x)\mathrm{th}(y)}$$

4) Tracer la courbe de la fonction th en y faisant apparaitre les éventuelles asymptotes, et la ou les solutions de l'équation $\mathrm{th}(x) = \frac{1}{2}$.

Partie B : Etude de la bijection

On pose la fonction $\mathrm{th}^{-1} = \mathrm{argth}$ la fonction réciproque de th.

1) Déterminer l'ensemble de définition de argth.

2) Déterminer les variations de argth sur son ensemble de définition (on ne demande pas de dériver !).

3) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathcal{D}_{\mathrm{argth}}, \mathrm{argth}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

4) Démontrer que :

$$\forall\, x \in \mathcal{D}_{\mathrm{argth}}, \mathrm{argth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

5) Montrer que la fonction argth est impaire.

6) Tracer la courbe de la fonction argth en y faisant apparaitre les éventuelles asymptotes.

Partie C : Une application

On pose :

$$t : x \mapsto \mathrm{argth}\left(\sqrt{\frac{\mathrm{ch}(x) - 1}{\mathrm{ch}(x) + 1}}\right)$$

1) Vérifier que le domaine de définition de t est $\mathbb{R}$.

2) On pose $y = \mathrm{ch}(x)$. Vérifier que la fonction h définie par $h(y) = t(x)$ sécrit sous la forme :

$$h(y) = \frac{1}{2}\ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$$

3) En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, t(x) = \frac{|x|}{2}$$