Programme de Colle n°1
PCSI 2024-2025
(16 au 20 septembre 2024)

Extrait du BO

Inégalité dans $\mathbb{R}$

c) Inégalités

Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. Compatibilité avec les opérations. Intervalles de $\mathbb{R}$.	Exemples de majoration et de minoration de sommes, de produits et de quotients. Utilisation de factorisations et de tableaux de signes. Résolution d'inéquations.
Valeur absolue. Inégalité triangulaire.	Interprétation sur la droite réelle d'inégalités du type $\lvert x-a\rvert \leqslant b$.
Dans $\mathbb{R}$, parties majorées, minorées, bornées. Majorant, minorant ; maximum, minimum.	
Partie entière d'un nombre réel.	Notation $\lfloor x \rfloor$.

Généralité sur les fonctions

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Généralités sur les fonctions	
Ensemble de définition.	
Représentation graphique d'une fonction f à valeurs réelles.	Les étudiants doivent savoir déduire de la représentation graphique de f celles de fonctions obtenues par des transformations simples, comme $x \mapsto f(x+a)$ ou $x \mapsto f(ax)$.
Parité, imparité, périodicité.	Interprétation géométrique de ces propriétés. Utilisation pour la réduction du domaine d'étude.
Somme, produit, composée.	
Monotonie (large et stricte).	
Fonctions majorées, minorées, bornées.	Traduction géométrique de ces propriétés. La fonction f est bornée si et seulement si $\lvert f\rvert$ est majorée.

Dérivation

b) Dérivation

Dérivée d'une fonction.	Notations $f'(x)$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(f(x)\big)$.
Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient, d'une composée.	Ces résultats sont rappelés, avec la définition de la dérivée et l'équation de la tangente ; ils ne sont pas démontrés à ce stade. Exemples simples de calculs de dérivées partielles.
Caractérisation des fonctions constantes, (dé)croissantes, strictement (dé)croissantes, parmi les fonctions dérivables sur un intervalle.	Résultats admis à ce stade.
Tableau de variations. Étude pratique d'une fonction. Tracé du graphe.	Application : recherche d'extremums, démonstration d'inégalités.
Représentation graphique et dérivée d'une fonction réciproque.	La formule donnant la dérivée est admise, mais on en donne l'interprétation géométrique.
Fonction de classe $\mathscr{C}^1$.	
Dérivées d'ordre supérieur.	

Tous les exercices du TD I,II, III

Question de cours

Chapitre I :

Propriété II.a.3 (Inégalité triangulaire sur $\mathbb{R}$) :

$$\forall (x,x') \in \mathbb{R}^2, \big|\lvert x\rvert - \lvert x'\rvert\big| \leq \lvert x+x'\rvert \leq \lvert x\rvert + \lvert x'\rvert$$

Remarque : Les cas d'égalités seront traités dans le chapitre des complexes.

Chapitre III :

Exemple I.e.1 : On pose :

$$g:\begin{cases}]0;+\infty[\to]0;+\infty[\\ x\mapsto \dfrac{1}{x}\end{cases}$$

Déterminer $g^{(n)}$ pour tout entier naturel non nul.

Proposition (Equation de la tangente) II.a.1 : Soit f une fonction dérivable en x=a. Alors l´équation de la tangente en x=a est donnée par :

$$(T_a): y = f'(a)(x-a)+f(a)$$

Exercices à savoir refaire

TD I :

Application II.a.4 : Démontrer que :

$$\forall\,(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n, \left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \le \sum_{k=1}^{n}|x_k|$$

Exercice B.1 : Démontrer les inégalités suivantes :

$$\text{a) } \forall(a,b)\in\mathbb{R}^2, ab\le\frac{1}{2}(a^2+b^2) \qquad \text{b)} \forall(a,b,c)\in\mathbb{R}^3, ab+ac+bc\le a^2+b^2+c^2$$

Exercice B6 du TD I : 1) Démontrer que :

$$\forall\, x>0, x+\frac{1}{x}\ge 2$$

2) En déduire par récurrence que :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\ge n^2$$

Application II.c.4 : Démontrer que :

$$\forall\, x\ge 0, x\ge \sin(x)\ge x-\frac{x^3}{6}$$

TD III :

Exercice C.1 : On pose :

$$\forall\, m\in\mathbb{R}, f_m:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \dfrac{x+m}{x^2+1}\end{cases}$$

On note C_m sa courbe représentative.

1) Montrer que les tangentes aux courbes C_m au point d'abscisse 0 sont parallèles.

2) Montrer que les tangentes aux courbes C_m au point d'abscisse 1 sont concourantes.