TD 5 : Calculs algébriques

Partie A : Mettre sous forme de somme

Exercice A.1 : Ecrire les différentes sommes suivantes à l'aide du signe Σ puis les calculer:

1) $S_1 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \cdots + 2019$
2) $S_2 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - \cdots + 2017 - 2018$
3) $S_3 = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \cdots + 2^{2018}$
4) $S_4 = 1 + 4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 19 + \cdots + 301$

Exercice A.2 : Ecrire les algorithmes suivants avec Python, puis avec le signe Σ puis déterminer la valeur affichée :

```
Variable :      S, I et A sont du type nombre

Traitement :    3 ← A
                A ← S
                Pour I allant de 1 à 24
                        A+5 ← A
                        S+A ← S
                Fin POUR
                Afficher S
```

```
Variable :      S, I et A sont du type nombre

Traitement :    1 ← A
                A ← S
                Pour I allant de 39 à 58
                        2A ← A
                        S+A ← S
                Fin POUR
                Afficher S
```

Exercice A.3 : Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(\alpha + a_k) = \alpha + \sum_{k=0}^{n} a_k$ **b)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right)$ **c)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(a_k)^\beta = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)^\beta$

Partie B : Calcul de somme par récurrence ou séparation

Exercice B.1 : a) Démontrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

b) En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$

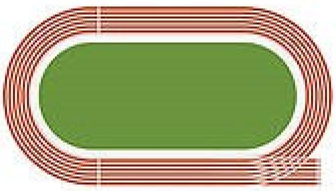
Exercice B.2 : On pose la suite :

$$\begin{cases} a_0 = 5 \\ a_{n+1} = a_n + 7 \end{cases}$$

a) Déterminer : $\forall\, n \in \mathbb{N}, S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$

b) Calculer : $\forall\, n \in \mathbb{N}, Q_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} a_k$

Exercice B.3 : Une piste d´athlétisme mesure 400m de circonférence. Marc décide de courir 10km sur cette piste. Au final, il a mis 33 minutes et 45 secondes. On sait de plus qu´à cause de la fatigue, il court 2 secondes plus lentement à chaque tour.
Combien a t´il mis pour parcourir le premier tour ?



Exercice B.4 : Soit n un entier naturel non nul. Calculer :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k$$

Exercice B.5 : Démontrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k! \leq 2 \times n!$$

Partie C : Décalage d'indice et télescopage

Exercice C.1 : Soit n un entier naturel non nul. On pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

a) Déterminer trois réels a, b et c tel que :

$$\forall\, k \geq 1, \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$$

b) En déduire la valeur de $\mathrm{S_n}$.

Exercice C.2 : a) Calculer de deux manières différentes :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (k+1)^5 - \sum_{k=1}^{n} k^5$$

b) En déduire la valeur de :

$$Q_n = \sum_{k=1}^{n} k^4$$

c) Vérifier ce résultat par récurrence.

Exercice C.3 : Calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$$

Exercice C.4 : Calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} k \times k!$$

Partie D : Somme des termes d'une suite géométrique

Exercice D.1 : On pose la suite :

$$\begin{cases} \mathrm{a_0 = 5} \\ \mathrm{a_{n+1} = a_n \times 3} \end{cases}$$

a) Déterminer :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

b) Calculer :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, Q_n = \sum_{k=n}^{2n} a_k$$

Exercice D.2 : Soit q un complexe. Calculer :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^{2k}$$

Partie E : Somme double

Exercice E.1 : Soit n un entier naturel non nul. Calculer :

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} (i+j)^2$$

Exercice E.2 : Soit n un entier naturel non nul. Calculer :

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} ij$$

Exercice E.3 : Soient n un entier naturel non nul et x complexe. Calculer :

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} x^{i+j}$$

Exercice E.4 : Soit n un entier naturel non nul. Calculer :

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} |i-j|$$

Exercice E.5 : Soit n un entier naturel non nul. Calculer :

$$\sum_{0\leq i\leq j\leq n} \frac{i}{j+1}$$

Partie F : Calcul de produit

Exercice F.1 : Soit n un entier naturel. Calculer :

$$P_n = \prod_{k=0}^{n} 2^k$$

Exercice F2 : Soit n un entier naturel non nul. Calculer :

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} 2^{\frac{1}{k(k+1)}}$$

Exercice F3 : Déterminer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \prod_{k=0}^{n} (2k+1)$$

Exercice F4 : Démontrer que :

$$\forall\, n \geq 1, \frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

Exercice F5 : Soit n un entier naturel non nul.

a) Calculer :

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} k(n+1-k)$$

b) En déduire que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

Partie G : binôme de Newton

Exercice G.1 : Soit $(\mathrm{a}, \mathrm{n}) \in \mathbb{R}\times\mathbb{N}^*$. Ecrire sous une seule forme :

$$(1+a)^n + (1-a)^n - 2a^n$$

Exercice G.2 : Démontrer que :

$$\forall (x;n) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1+nx$$

Exercice G.3 : Déterminer les sommes suivantes :

$$A = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} \qquad B = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} \qquad C = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$$

Exercice G.4 : Calculer :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k}$$

(Indice : On pourra faire le changement d'indice j=2n+1-k)

Exercice G.5 : Calculer :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$$

Exercice G.6 : Soit n un entier naturel non nul. On pose :

$$f_n : \begin{cases}]-1;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^{n-1}\, ln(1+x) \end{cases}$$

Montrer que :

$$\forall x > -1, f_n^{(n)}(x) = (n-1)! \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+x)^k} \right)$$

Exercice G.7 : Soit n un entier naturel. Déterminer la dérivée n-ième de $x \mapsto x^n(1+x)^n$. En déduire la valeur de :

$$I = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$