Chapitre 5 : Calculs Algébriques

Dans tout ce cours I désigne un ensemble fini d'entier et $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ désigne une suite de nombres réels ordonnée sur I.

I) Somme

a) Le symbole Σ

Définition :

$$\sum_{i\in I} a_i \text{ désigne la somme des termes de la famille } (a_i)_{i\in I}$$

i s'appelle un indice muet. On peut très bien prendre une autre notation :

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{k\in I} a_k$$

Remarque : Pour tout entier m et n, on a la notation suivante :

$$[\![m;n]\!] = \{m; m+1; \dots; n\} = [m;n] \cap \mathbb{Z}$$

Si I est du type $[\![m;n]\!]$, on trouve plus facilement la notation :

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in[\![m;n]\!],} a_i = \sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m}^{i=n} a_i = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$$

Exemple I.a.1 :

$$\sum_{i\in\{0;1;2;3;4\}} 2^i = \sum_{k\in[\![0;4]\!],} 2^k = \sum_{k=0}^{4} 2^k$$

Remarque **:** En informatique ce type de somme peut être représenté par la boucle FOR

Application I.a.2 : Ecrire sous forme de somme les algorithmes suivants :

Boucle sur Python.py - F:\C

File Edit Format Run Op

```
s=0
for i in range(0,5):
    s=s+2**i
print(s)
```

File Edit Format Run Opt

```
s=0
for i in range(4,21):
    s=s+(2*i+1)
print(s)
```

b) Utilisation de la récurrence

Remarque : On a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n+1} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_k + a_{n+1}$$

Cela nous invite à effectuer des démonstrations par récurrence lorsque l'on connait le résultat à démontrer.

Application I.b.1 (progression arithmétique) : Démontrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Application I.b.2 : Démontrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

c) Séparer les sommes

Propriété I.c.1 : Soient $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux suites de nombres réels ordonnée sur I. On a alors :

$$\sum_{i\in I}(a_i + b_i) = \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} b_i$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \sum_{i\in I}(\lambda a_i) = \lambda \sum_{i\in I} a_i$$

Application I.c.2 : Déterminer :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(2k+1)$$

Application I.c.3 : Déterminer :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k(k+1)$$

d) Décalage d'indice et télescopage

Remarque : Pour effectuer un changement d'indice, on crée un nouvel indice à partir du premier puis on réindexe toute la suite en changeant l'ancien indice par le nouveau.

Propriété I.d.1 (télescopage) : On a :

$$\sum_{k=1}^{n}(u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_1$$

Application I.d.2 : Calculer :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

Propriété I.d.3 (Extension d'une identité remarquable) :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N} : a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$$

Application I.d.4 **:** Calculer :

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2}$$

e) Somme des termes géométriques

Propriété I.e.1 :

$$\forall q \in \mathbb{R}, q \neq 1, \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

Remarque : *Si q=1* :

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = n + 1$$

Application I.e.2 : Déterminer :

$$A = \sum_{k=12}^{25} 2^k$$

Application I.e.2 : Des extraterrestres souhaitent envahir la Terre (mais de façon très discrète…). A minuit, un homme observe la soucoupe volante, à 00h01, il a prévenu trois personnes de sa connaissance par téléphone. A 00h02, ces trois personnes ont-elles-mêmes prévenues trois nouvelles personnes chacune, et ainsi de suite toutes les minutes (on suppose bien évidemment que toute personne prévenue ne l'était pas précédemment !). A quelle heure l'humanité entière sera prévenue de l'invasion ?

III) Somme double

a) Généralité

Définition : Soient I et J deux ensembles finis non vides de ℕ. Soit $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de nombres réels. On note :

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j} = \sum_{\substack{i\in I\\ j\in J}} a_{i,j}$$

La somme des éléments de $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$.

Propriété III.a.1 : On a :

$$\sum_{\substack{m\le i\le n\\ p\le j\le q}} a_{i,j} = \sum_{m\le i\le n}\left(\sum_{p\le j\le q} a_{i,j}\right)$$

Application III.a.2 : Calculer :

$$\sum_{0\le i,j\le n} (i+j)$$

b) Somme double triangulaire

Proposition III.b.1 : Soient m et n deux entiers naturels et $(a_{i,j})_{(i,j)\in\Omega}$ une famille de nombres complexes avec :

$$\Omega = \{(i;j);\ m\le i\le j\le n\}$$

On a alors :

$$\sum_{(i,j)\in\Omega} a_{i,j} = \sum_{m\le i\le j\le n} a_{i,j} = \sum_{i=m}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=m}^{n}\sum_{i=j}^{n} a_{i,j}$$

Application III.b.2 : Calculer :

$$S_n = \sum_{1\le i,j\le n} \min(i;j)$$

c) Produit de deux sommes

Proposition III.c.1 : Soit $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_j)_{j\in J}$ deux familles de nombres complexes. On a alors :

$$\sum_{i\in I} a_i \times \sum_{j\in J} b_j = \sum_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j$$

Application III.c.2 : Calculer :

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} ij$$

IV) Produit

a) Le symbole Π

Définition :

$\prod_{i\in I} a_i$ désigne le produit des termes de la famille $(a_i)_{i\in I}$

De la même façon que la somme on a :

$$\prod_{i\in I} a_i = \prod_{i\in [\![m;n]\!],} a_i = \prod_{i=m}^{n} a_i = a_m \times a_{m+1} \times \ldots \times a_n$$

```python
A=1
P=A
for i in range(1,57):
    A=3*A
    P=P*A
print(P)
```

Exemple IV.a.1 :

a) $\prod_{i=0}^{3000} i =$

b) $\prod_{i=0}^{3000} 2 =$

b) Au produit rien de nouveau

Remarque : De la même façon que pour la somme, nous pouvons démontrer des résultats par récurrence, par télescopage et décalage d'indice, écrire des doubles produits…

Application IV.b.1 : Calculer :

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k+1}$$

Application IV.b.2 : Calculer :

$$\sum_{k=2}^{n} ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$$

Application IV.b.3 : Déterminer le résultat affiché par l'algorithme suivant :

```python
a=2
P=a
for i in range(1,10):
    a=a*3
    P=P*a
print(P)
```

V) Le binôme de Newton

a) Le factoriel

Définition : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le nombre factoriel n, noté n! Par :

$$n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n = \prod_{k=1}^{n} k$$

Par convention on pose : 0 ! = 1

Exemple I.a.1: Calculer les 6 premiers factoriels.

Application V.a.2 : Ecrire les nombres suivants en utilisant la factorielle :

$$A = \prod_{k=7}^{15} k = 7 \times 8 \times \ldots \times 15$$

$$B = 3 \times 5 \times \ldots \times 2017 = \prod_{k=1}^{1009} (2k-1)$$

b) Propriété de dénombrement

Propriété V.b.1 : Dans un ensemble E_n fini à n éléments : $E = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, il y a exactement n! permutations de taille n.

Application V.b.2 : Une saison de formule 1 compte 22 pilotes. Déterminer le nombre de classements différents que cela peut engendrer.

Application V.b.3 : Une saison de formule 1 compte 22 pilotes. Déterminer le nombre de podium différents.

c) Les coefficients binomiaux

Définition : Soient n et p deux entiers tels que : $0 \leq p \leq n$. Soit E un ensemble fini possédant n éléments :

$$E = \{a_1; a_2; \dots; a_n\}$$

On note $\binom{n}{p}$ le nombre de sous-ensemble de E possédant p éléments.

Exemple V.c.1 : Soit E = {a ;b ;c ;d ;e} un ensemble à 5 éléments. Déterminer le nombre de sous-ensemble à 3 éléments.

Proposition V.c.2 : On a la relation suivante :

$$\forall\ (n;p) \in \mathbb{N}^2, 0 \leq p \leq n, \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

Application V.c.3 : Déterminer $\binom{14}{12}$

d) Relations entre coefficients binomiaux

Proposition V.d.1 : On a :

$$\forall\ (n;p) \in \mathbb{N}^2, 0 \leq p \leq n, \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Remarque : Par commodité on définit :

$$\binom{n}{p} = 0 \text{ si } p < 0 \text{ ou } p > n$$

Application V.d.2 : Déterminer le nombre de groupes de 5 élèves que l'on peut former avec une classe de 49 élèves.

Proposition V.d.3 (identité de Fermat) : On a :

$$\forall\ (n;p) \in \mathbb{N}^2, 0 \leq p \leq n, \binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$$

***Application V.d.4 (Triangle de Pascal)* :**

	$p=0$	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=5$	$p=6$	$\cdots$
$n=0$	1							
$n=1$	1	1						
$n=2$	1	2	1					
$n=3$	1	3	3	1				
$n=4$	1	4	6	4	1			
$n=5$	1	5	10	10	5	1		
$n=6$	1	6	15	20	15	6	1	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\ddots$
n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\ddots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

e) Formule du binôme de Newton

Proposition V.e.1 : On a :

$$\forall\,(x;y)\in\mathbb{R}^2, \forall\,n\in\mathbb{N}, (x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$$

Application V.e.2 : On a :

$$\forall\,n\in\mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$$

Application V.e.3 : Soit n ∈ $\mathbb{N}^*$. On pose :

$$f_n\colon\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x^n\end{cases}$$

Démontrer que f_n est dérivable et que :

$$\forall x\in\mathbb{R}, f_n'(x)=nx^{n-1}$$

Application V.e.4 : Déterminer la valeur de S_n définit par :

$$\forall\,n\in\mathbb{N}, S_n=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}$$

Propriété V.e.4 (Formule de Leibniz) : Soient *f* et g deux fonctions n fois dérivables sur un intervalle I de ℝ. On a alors :

$$(fg)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n-k)}$$

Application V.e.5 : Soit n un entier naturel. Déterminer la dérivée n-ième de x ↦ $e^x(x^2+2x-7)$.