

**Programme de Colle n°2**  
**PCSI 2024-2025**  
**(23 au 27 septembre 2024)**

**Extrait du BO**

**Inégalité dans  $\mathbb{R}$**

**c) Inégalités**

Relation d'ordre sur  $\mathbb{R}$ . Compatibilité avec les opérations.  
Intervalles de  $\mathbb{R}$ .

Valeur absolue. Inégalité triangulaire.

Dans  $\mathbb{R}$ , parties majorées, minorées, bornées.  
Majorant, minorant; maximum, minimum.

Exemples de majoration et de minoration de sommes, de produits et de quotients. Utilisation de factorisations et de tableaux de signes. Résolution d'inéquations.  
Interprétation sur la droite réelle d'inégalités du type  $|x - a| \leq b$ .

**Généralité sur les fonctions**

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

**a) Généralités sur les fonctions**

Ensemble de définition.

Représentation graphique d'une fonction  $f$  à valeurs réelles.

Parité, imparité, périodicité.

Somme, produit, composée.

Monotonie (large et stricte).

Fonctions majorées, minorées, bornées.

Les étudiants doivent savoir déduire de la représentation graphique de  $f$  celles de fonctions obtenues par des transformations simples, comme  $x \mapsto f(x + a)$  ou  $x \mapsto f(ax)$ .  
Interprétation géométrique de ces propriétés. Utilisation pour la réduction du domaine d'étude.

Traduction géométrique de ces propriétés.

La fonction  $f$  est bornée si et seulement si  $|f|$  est majorée.

**Dérivation**

**b) Dérivation**

Dérivée d'une fonction.

Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient, d'une composée.

Caractérisation des fonctions constantes, (dé)croissantes, strictement (dé)croissantes, parmi les fonctions dérivables sur un intervalle.

Tableau de variations. Étude pratique d'une fonction.

Tracé du graphe.

Représentation graphique et dérivée d'une fonction réciproque.

Fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Dérivées d'ordre supérieur.

Notations  $f'(x)$ ,  $\frac{d}{dx}(f(x))$ .

Ces résultats sont rappelés, avec la définition de la dérivée et l'équation de la tangente; ils ne sont pas démontrés à ce stade.

Exemples simples de calculs de dérivées partielles.

Résultats admis à ce stade.

Application : recherche d'extremums, démonstration d'inégalités.

La formule donnant la dérivée est admise, mais on en donne l'interprétation géométrique.

**Fonctions usuelles**

Fonctions exponentielle, logarithme népérien, puissances.

Relations  $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$ ,  $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$ ,  $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$ .

Croissances comparées des fonctions logarithme, puissances et exponentielle.

Inégalités  $\exp(x) \geq 1 + x$ ,  $\ln(1 + x) \leq x$ .

Dérivée, variations, représentation graphique.

Les fonctions puissances sont définies sur  $\mathbb{R}_+^*$  et prolongées en 0 le cas échéant. Seules les fonctions puissances entières sont en outre définies sur  $\mathbb{R}_-^*$ .

Logarithme décimal, logarithme en base 2.

Fonctions hyperboliques sh, ch.

Dérivée, variations, représentation graphique.  
La fonction tangente hyperbolique et les fonctions hyperboliques réciproques sont hors programme. La seule formule exigible est  $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$ .

## Fonctions cosinus, sinus.

Tous les exercices du TD I,II, III, IV (jusqu'aux fonctions cos et sin)

### Question de cours

#### Chapitre I :

**Propriété II.a.3 (Inégalité triangulaire sur  $\mathbb{R}$ ) :**

$$\forall (x, x') \in \mathbb{R}^2, |x| - |x'| \leq |x + x'| \leq |x| + |x'|$$

**Remarque :** Les cas d'égalités seront traités dans le chapitre des complexes.

#### Chapitre III :

- **Exemple I.e.1 :** On pose :

$$g: \begin{cases} ]0; +\infty[ \rightarrow ]0; +\infty[ \\ x \mapsto \frac{1}{x} \end{cases}$$

Déterminer  $g^{(n)}$  pour tout entier naturel non nul.

- **Proposition (Equation de la tangente) II.a.1 :** Soit  $f$  une fonction dérivable en  $x=a$ . Alors l'équation de la tangente en  $x=a$  est donnée par :

$$(T_a): y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

#### Chapitre IV :

- Savoir les formules trigonométriques du type  $\cos(a \pm b)$ ,  $\sin(a \pm b)$ ,  $\cos(a) \cos(b)$  ou encore  $\sin(a) + \sin(b)$

On ne demande pas forcément aux étudiants de les connaître par cœur, mais de savoir les retrouver en moins de trois minutes !

### Exercices à savoir refaire

#### TD I :

- **Application II.a.4 :** Démontrer que :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \left| \sum_{k=1}^n x_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |x_k|$$

- **Exercice B.1 :** Démontrer les inégalités suivantes :

$$\text{a) } \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2) \quad \text{b) } \forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, ab + ac + bc \leq a^2 + b^2 + c^2$$

- **Exercice B6 du TD I :** 1) Démontrer que :

$$\forall x > 0, x + \frac{1}{x} \geq 2$$

2) En déduire par récurrence que :

$$\left( \sum_{k=1}^n a_i \right) \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_i} \right) \geq n^2$$

#### TD III :

- **Exercice C.1 :** On pose :

$$\forall m \in \mathbb{R}, f_m: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x+m}{x^2+1} \end{cases}$$

On note  $C_m$  sa courbe représentative.

- 1) Montrer que les tangentes aux courbes  $C_m$  au point d'abscisse 0 sont parallèles.
- 2) Montrer que les tangentes aux courbes  $C_m$  au point d'abscisse 1 sont concourantes.

- **Application II.c.4** : Démontrer que :

$$\forall x \geq 0, x \geq \sin(x) \geq x - \frac{x^3}{6}$$

#### TD IV :

- $\cos$  et  $\sin$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}$  et  $\cos' = -\sin, \sin' = \cos$
- Résoudre  $\cos(3x) + \sin(x) = 0$