**Correction DS n°1**
**PCSI 2024-2025**
**21 septembre 2024**

## Exercice 1 : Une réciproque

Dans tout cet exercice on pose :

$$f : x \mapsto \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de $f$.
2) Etudier la parité de $f$ (c'est-à-dire $f$ est-elle paire ? impaire ?).
3) Déterminer la limite de $f$ en $1^-$. Quelle conséquence pour la courbe $\mathcal{C}_f$ cela implique t'il ?
4) Calculer $f'$. En déduire que $f$ réalise une bijection de $]-1;1[$ dans un ensemble à déterminer.
5) Déterminer la bijection réciproque de $f$, noté $f^{-1}$.
6) On rappelle ici que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} sh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \\ ch(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{cases}$$

Montrer que :

$$f^{-1} : x \mapsto th\left(\frac{x}{2}\right) \; avec \; th : x \mapsto \frac{sh(x)}{ch(x)}$$

1) $f$ est définie si et seulement si :

$$\frac{1+x}{1-x} > 0$$

On effectue le tableau de signe suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1+x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | | |
| $1-x$ | | $+$ | | | $0$ | $-$ | |
| $\frac{1+x}{1-x}$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $\Vert$ | $-$ | |

On en déduit donc que : $\boldsymbol{\mathcal{D}_f = ]-1;1[}$

2) On a :

$$\forall x \in ]-1;1[, f(-x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = -\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = -f(x)$$

**Ainsi $f$ est impaire.**

3) On a :

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1+x}{1-x} = \lim_{X\to 0^+} \frac{2}{X} = +\infty$$

**Donc $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$.**

4) $f$ est dériable sur $]-1;1[$ par composée et :

$$\forall x \in ]-1;1[, f'(x) = \left(\frac{2}{(1-x)^2}\right) \times \frac{1}{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{2}{1-x^2} > 0$$

Donc $f$ est strictement croissante sur $]-1;1[$. Par imparité on obtient le tableau de variations suivant :
On a donc $f$ :
_ Continue sur $]-1;1[$
_ Strictement croissante sur $]-1;1[$
_ $f(]-1;1[) = \mathbb{R}$

**D'après le théorème des valeurs intermédiaires (ou son corollaire ou le théorème de la bijection), $f$ réalise une bijection de $]-1;1[$ dans $\mathbb{R}$.**

5) Soit $y \in \mathbb{R}$. On résout :

$$f(x) = y \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = y \Leftrightarrow \frac{1+x}{1-x} = e^y \Leftrightarrow x = \frac{e^y - 1}{e^y + 1}$$

Ainsi on a :

$$\boldsymbol{f^{-1}: x \mapsto \frac{e^x - 1}{e^x + 1}}$$

6) On peut le faire de deux façons différentes.

**M1 : Avec l'expression de $f^{-1}$ et « l'arc moitié sur $\mathbb{R}$ »**

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{-1}(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{e^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\right)}{e^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)} = \frac{sh\left(\frac{x}{2}\right)}{ch\left(\frac{x}{2}\right)} = \boldsymbol{th\left(\frac{x}{2}\right)}$$

**M2 : Avec $f$ et $th$**

On a :

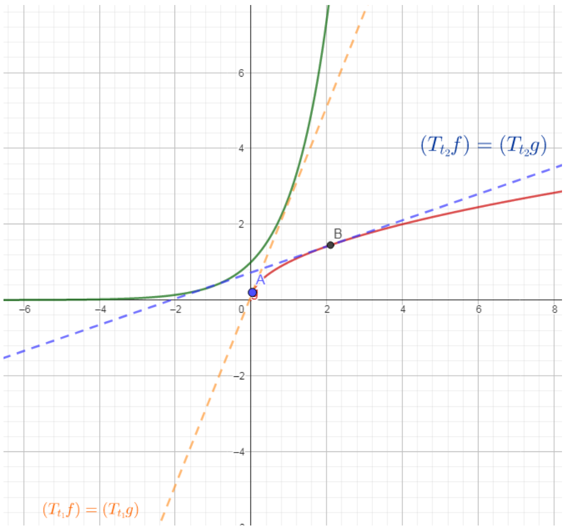
$$\forall x \in \mathbb{R}, f\left(th\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \ln\left(\frac{1 + th\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - th\left(\frac{x}{2}\right)}\right) = \ln\left(\frac{ch\left(\frac{x}{2}\right) + sh\left(\frac{x}{2}\right)}{ch\left(\frac{x}{2}\right) - sh\left(\frac{x}{2}\right)}\right) = \ln\left(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{e^{-\frac{x}{2}}}\right) = \ln(e^x) = x$$

Ainsi on a :

$$\boldsymbol{f^{-1}: x \mapsto th\left(\frac{x}{2}\right)}$$

## Exercice 2 : Tangentes communes

On définit $f: x \mapsto e^x$ et $g: x \mapsto \ln(x)$. On cherche à déterminer le nombre de tangentes communes à leurs courbes respectives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, mais pas nécessairement au même point, comme illustré sur le dessin ci-contre tiré du DS de l'an dernier :




1) Donner l'ensemble de définition de $f$ et de $g$.

2) Démontrer qu'il existe une tangente $(T)$ à la courbe de $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse $x = a$ et à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $x = b$ si et seulement si :

$$\begin{cases} b = -\ln(a) \\ a\ln(a) - \ln(a) - a - 1 = 0 \end{cases}$$

Dans toute la suite on pose la fonction $\phi$ définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$\phi: x \mapsto x\ln(x) - \ln(x) - x - 1$$

3) Démontrer que $\phi$ est monotone sur $]0; 1[$.

4) En déduire qu'il existe un unique $\alpha \in ]0; 1[$ tel que $\phi(\alpha) = 0$. (On ne cherche pas à déterminer la valeur de $\alpha$).

5) Montrer que :

$$\forall x > 0, \phi\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\phi(x)}{x}$$

6) En déduire qu'il existe deux tangentes communes à $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ :

_ $(T_1)$ tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $A_1\left(-\ln(\alpha), \frac{1}{\alpha}\right)$ et tangente à $\mathcal{C}_g$ au point $B_1(\alpha, \ln(\alpha))$

_ $(T_2)$ tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $A_2(\ln(\alpha), \alpha)$ et tangente à $\mathcal{C}_g$ au point $B_2\left(\frac{1}{\alpha}, -\ln(\alpha)\right)$

7) On pose :

$$h: x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$$

a) Déterminer l'ensemble de définition de $h$

b) Démontrer que $h$ est décroissante sur chacun des intervalles de son ensemble de définition.

c) Calculer les limites de $h(x)$ pour $x \to \pm\infty$, et $x \to 1$.

d) Montrer que $\mathcal{C}_h$, la courbe représentative de la fonction $h$, est symétrique par rapport à la droite $(D)$ d'équation $y = x$. (On dit que $h$ est involutive).

e) Montrer que $B_1$ et $B_2$ sont les points d'intersection de $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$

| |
|---|
| 8) Tracer avec soin, et en utilisant des couleurs différentes, $\mathcal{C}_g, \mathcal{C}_f, \mathcal{C}_h, (D), (T_1), (T_2)$ et faites apparaitre$A_1, A_2, B_1, B_2$. |

1) $\boldsymbol{\mathcal{D}_{x\mapsto e^x} = \mathbb{R}\ et\ \mathcal{D}_{ln} = ]0;+\infty[}$

2) On sait que :

$$(T_{a,f}): y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

On a donc :

$$(T_{b,f}): y = e^b(x-b) + e^b = e^b x + (1-b)e^b$$

De même on a :

$$(T_{a,f}): y = \frac{1}{a}(x-a) + \ln(a) = \frac{1}{a}x - 1 + \ln(a)$$

Ainsi $(T)$ est une tangente commune à $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, si et seulement si elle a même coefficient directeur et même ordonnée à l'origine :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\frac{1}{a} = e^b} \\ \boldsymbol{(1-b)e^b = -1 + \ln(a)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{b = -\ln(a)} \\ \boldsymbol{(1+\ln(a)) \times \frac{1}{a} = -1 + \ln(a)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{b = -\ln(a)} \\ \boldsymbol{a\ln(a) - \ln(a) - a - 1 = 0} \end{cases}$$

3) On a :

$$\forall x > 0, \phi(x) = x\ln(x) - \ln(x) - x - 1 \Longrightarrow \forall x > 0, \phi'^{(x)} = \ln(x) + 1 - \frac{1}{x} - 1 = \ln(x) - \frac{1}{x}$$

De plus on sait que :

$$\forall x \in ]0;1[, \ln(x) < 0\ et\ \frac{1}{x} < 0$$

On a donc :

$$\forall x \in ]0;1[, \phi(x) < 0$$

**Donc $\boldsymbol{\phi}$ est décroissante sur ]0; 1[.**

4) On a :

$$\phi(1) = -2$$

De plus on a :

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0\ (par\ croissance\ comparée)$$
$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = \lim_{x\to 0^+} -\ln(x) - 1 = +\infty$$

On a donc le tableau suivant :

| $x$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|
| $\phi'(x)$ | $-$ | |
| $\phi$ | $+\infty$ ↘ | $-2$ |

On sait donc que :

_ $\phi$ est continue sur ]0; 1[

_ $\phi$ est strictement décroissante

_ $\phi(]0;1[) = ]-2;+\infty[$

**D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires :**

$$\boldsymbol{\exists\,!\,\alpha \in ]0;1[\ tel\ que\ \phi(\alpha) = 0}$$

| $x$ | $0$ | $\alpha$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $\phi$ | $+\infty$ ↘ | $0$ ↘ | $-2$ |

5) On a :

$$\forall x > 0, \boldsymbol{\phi}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{x}\right) - \ln\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} - 1 = -\frac{1}{x}\ln(x) + \ln(x) - \frac{1}{x} - 1 = \frac{x\ln(x) - \ln(x) - x - 1}{x} = \frac{\boldsymbol{\phi}(x)}{x}$$

6) On sait que s'il existe une tangente $(T)$ commune aux deux courbes alors :

$$\phi(a) = 0$$

De plus on a :

$$\phi(x) = 0 \Leftrightarrow \phi\left(\frac{1}{x}\right) \times x = 0 \Leftrightarrow \phi\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \ (car\ x \neq 0)$$

De plus si $x > 1, 0 < \frac{1}{x} < 1$

Sur $]0; 1[, \phi(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ donc on a :

$$\phi(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{\alpha; \frac{1}{\alpha}\right\}$$

On a donc, les deux courbes admettent une tangente si et seulement si :

$$a = \alpha\ et\ b = -\ln(\alpha)\ ou\ a = \frac{1}{\alpha}\ et\ b = \ln(\alpha)$$

On a donc :

$$\boldsymbol{A_1\left(-\ln(\alpha); \frac{1}{\alpha}\right)\ et\ B_1(\alpha; \ln(\alpha))}$$

$$\boldsymbol{A_2(\ln(\alpha); \alpha)\ et\ B_2\left(\frac{1}{\alpha}; -\ln(\alpha)\right)}$$

7) a) $h$ est définie si et seulement si $\boldsymbol{x \neq 1}$

b) On a $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}\backslash\{1\})$ et :

$$\forall x \neq 1, \phi'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0$$

**Donc $h$ est décroissante sur $]-\infty; 1[$ et sur $]1; +\infty[$.**

c) On a :

$$\boldsymbol{\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} = 1}$$

De même on a :

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 1^-} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{X\to 0^-} \frac{2}{X} = -\infty\ et\ \lim_{x\to 1^+} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{X\to 0^+} \frac{2}{X} = +\infty}$$

d) On a :

$$\forall x > 1, h\big(h(x)\big) = \frac{h(x)+1}{h(x)-1} = \frac{\frac{x+1}{x-1}+1}{\frac{x+1}{x-1}-1} = \frac{2x}{2} = x$$

**Ainsi $h$ est sa propre bijection réciproque (fonction involutive) et $\mathcal{C}_h$, la courbe représentative de la fonction $h$, est symétrique par rapport à la droite $(D)$ d'équation $y = x$.**

e) On résout :

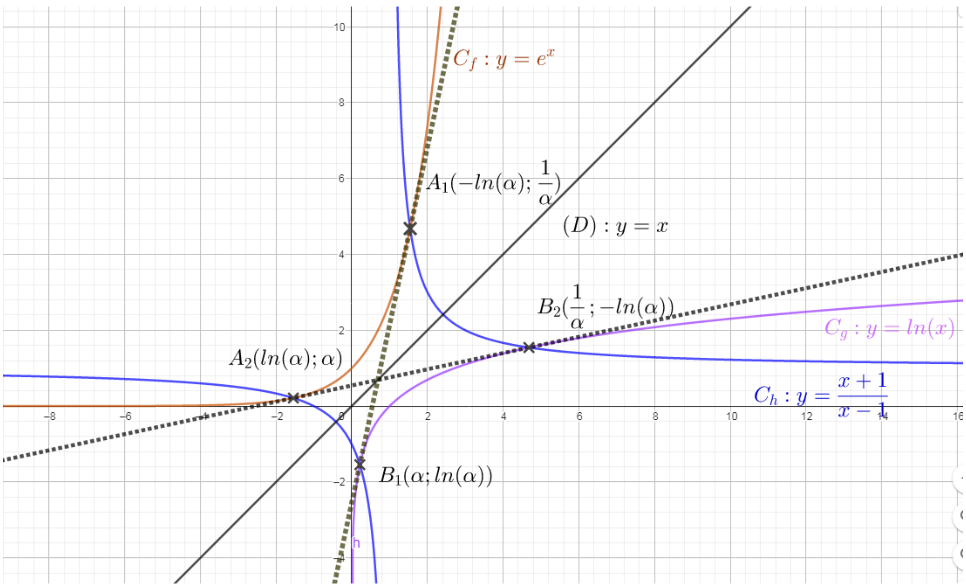
$$\boldsymbol{\ln(x) = \frac{x+1}{x-1}}$$

$$\boldsymbol{\Leftrightarrow x\ln(x) - \ln(x) - x - 1 = 0}$$

$$\boldsymbol{\Leftrightarrow x \in \left\{\alpha; \frac{1}{\alpha}\right\}}$$

***(d'après la question 6)***

8) On a (merci Géogébra !^^) :



**Problème 1 : Une méthode pour approchée $e$**

Le but de ce problème est de déterminer une méthode pour trouver une valeur approchée de $e^1 = e$.
Pour se faire, on va encadrer $e$ par deux fonctions $f$ $et$ $g$, avec $f$ croissante, $g$ décroissante tels que :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = e$$

**Partie A : Etude de $f$**

Dans toute cette partie on pose :

$$f: x \mapsto \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \ sur \ ]0;+\infty[$$

1) Démontrer que $f$ est bien définie et dérivable sur $]0;+\infty[$.
2) Démontrer que $f'(x)$ est du signe de $h_1(x)$ sur $]0;+\infty[$ avec :

$$h_1(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

3) Montrer que :

$$\forall x > 0, h_1'(x) = -\frac{1}{x(x+1)^2}$$

4) En déduire que $h_1$ est positive sur $]0;+\infty[$.
5) Démontrer que :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

6) En déduire que $f$ est croissante sur $]0;+\infty[$ et que :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = e$$

**Partie B : Etude de $g$**

Dans toute cette partie on pose :

$$g: x \mapsto \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1} \ sur \ ]0;+\infty[$$

1) Démontrer que $g$ est bien définie et dérivable sur $]0;+\infty[$
2) Démontrer que $g'(x)$ est du signe de $h_2(x)$ sur $]0;+\infty[$ avec :

$$h_2(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}$$

3) Démontrer que :

$$\forall x > 0, \ln(1+x) < x$$

4) En déduire que $g$ est décroissante sur $]0;+\infty[$.
5) Démontrer que la droite d'équation $y = e$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}_g$ en $+\infty$.

**Partie A**

1) On sait que :

$$\forall a > 0, \forall b \in \mathbb{R}, a^b = e^{b\ln(a)}$$

Ainsi $f$ est définie si et seulement si $1+\frac{1}{x} > 0$

Or on sait que :

$$\boxed{\forall x > 0, 1+\frac{1}{x} > 0}$$

On en déduit donc que $f$ est bien définie sur $]0;+\infty[$. De plus $f$ y est dérivable par composée de fonctions dérivables.

2) On a :

$$\forall x > 0, f(x) = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

On en déduit donc que :

$$\forall x > 0, f'(x) = \left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x \times \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}\right) e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right) e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = h_1(x) e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

Or on sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$$

**On en déduit donc que $f'(x)$est du signe de $h_1(x)$.**

3) On a :

$$\forall x>0, h_1'(x)=\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}+\frac{1}{(x+1)^2}=-\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{-(x+1)+x}{x(x+1)^2}=-\frac{1}{x(x+1)^2}$$

4) On sait que :

$$\forall x>0, h_1'(x)=-\frac{1}{x(x+1)^2}<0$$

Donc $h_1$ est décroissante sur $]0;+\infty[$.
De plus on a :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=0\ et\ \ln(1)=0$$

Par composée et somme on en déduit donc que :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right]=0$$

**Comme $h_1$ est décroissante sur $]0;+\infty[$, elle est positive :**

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $h1$ | $\searrow$ | $0$ |
| $h1(x)$ | $+$ | |

5) On a :

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f_1(x)-f_1(0)}{x-0}\ avec\ f_1(x)=\ln(1+x)$$

Comme $f_1$ est dérivable en 0, on en déduit donc que :

$$\lim_{x\to0}\frac{f_1(x)-f_1(0)}{x-0}=f_1'(0)=\frac{1}{1+0}=1$$

6) On sait que $f'(x)$ est du signe de $h_1(x)$ sur $]0;+\infty[$, donc d'après la question 4), $f'(x)>0$ sur $]0;+\infty[$.
Donc $f$ est croissante sur $]0;+\infty[$.
De plus on a :

$$\lim_{x\to+\infty}xln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{X\to0}\frac{1}{X}\ln(1+X)=1$$

D'après la question 5).
De plus on a :

$$\lim_{y\to1}e^y=e^1=e$$

Par composée on a :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

**Partie B**

1) Comme pour la question 1 de la partie A :

$$\forall x>0, 1+\frac{1}{x}>0 \Rightarrow g\ est\ définie\ sur\ ]0;+\infty[$$

2) On a :

$$\forall x>0, g(x)=e^{(x+1)ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

On en déduit donc que :

$$\forall x>0, g'(x)=\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+(x+1)\times\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}\right)e^{(x+1)ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\right)e^{(x+1)ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$\Rightarrow \forall x>0, g'(x)=h_2(x)e^{(x+1)ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

Or on sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$$

**On en déduit donc que $g'(x)$est du signe de $h_2(x)$.**

3) On pose :

$$ecart: x \mapsto x - ln(1+x) \ sur \ ]0; +\infty[$$

On sait que $ecart$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ $(écart \in \mathcal{D}(]0; +\infty[))$ et :

$$\forall x > 0, ecart'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} > 0$$

$$\Longrightarrow ecart\ est\ croissante\ sur\ ]0; +\infty[$$

De plus comme $ecart(0) = 0$ on en déduit donc que :

$$\forall x > 0, ecart(x) > 0$$

On a donc :

$$\mathbf{\forall x > 0, x > \ln(1+x)}$$

4) On sait que :

$$\forall x > 0, x > \ln(1+x)$$

Or on a :

$$\forall x > 0, \frac{1}{x} > 0$$

On peut donc appliquer l'inégalité précédente pour $\frac{1}{x}$ :

$$\forall x > 0, \frac{1}{x} > \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

Donc $\forall x > 0, g'(x) < 0$.

**Donc $g$ est décroissante sur $]0; +\infty[$.**

5) On sait que :

$$\forall x > 0, g(x) = f(x) \times \left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

Or on a :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = e \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1 \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x \to +\infty} g(x) = e$$

Donc $(D): y = e$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_g$ en $+\infty$.

**Remarque** : On a ainsi démontrer que :

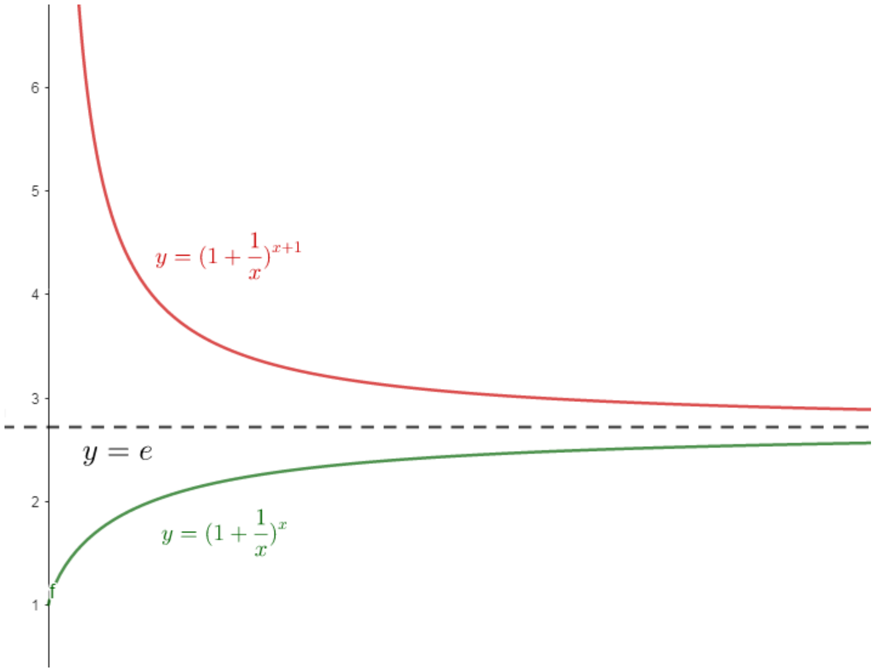
$$\forall x > 0, f(x) \leq e \leq g(x)$$

De plus on sait que $f$ et $g$ sont respectivement croissante et décroissante et tendent vers $e$ en $+\infty$. Ainsi plus les valeurs de $x$ sont grandes, plus « on se rapproche de e ». On a ainsi :

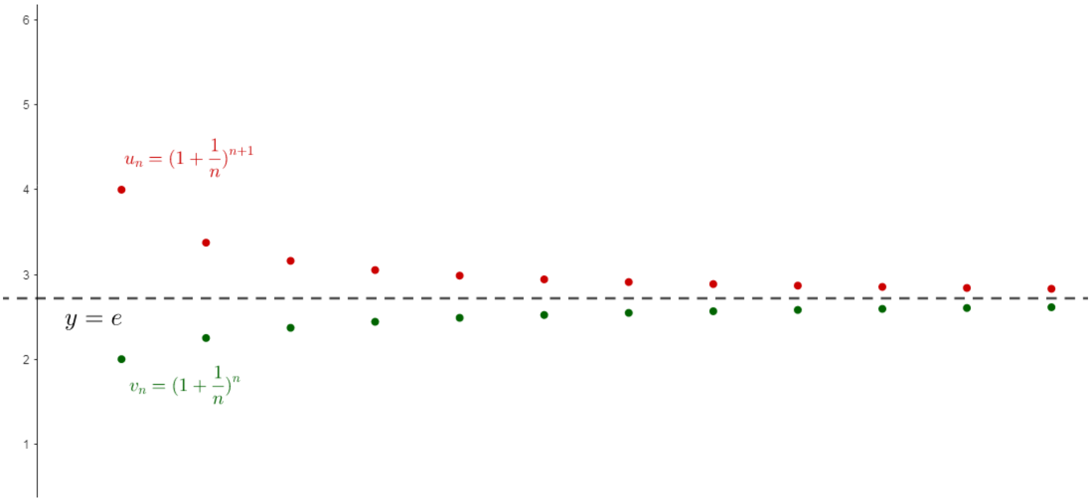
| 1 | Valeurs de x | Valeur de f(x) | Valeurs de g(x) |
|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 2 | 4 |
| 3 | 10 | 2,59374246 | 2,853116706 |
| 4 | 100 | 2,704813829 | 2,731861968 |
| 5 | 1000 | 2,716923932 | 2,719640856 |
| 6 | 10000 | 2,718145927 | 2,718417741 |
| 7 | 100000 | 2,718268237 | 2,71829542 |
| 8 | 1000000 | 2,718280469 | 2,718283187 |
| 9 | 10000000 | 2,718281694 | 2,718281966 |

Pour approcher des valeurs comme $\sqrt{2}, \pi, e$ ... on cherche à encadrer ces nombres par deux fonctions (ou deux suites), l'une croissante et l'autre décroissante qui convergent vers la valeur dont on cherche une valeur approchée. Pour les suites on parle de « suites adjacentes », au programme du premier semestre de PCSI.

## Avec des fonctions




## Avec les suites




## Avec Python

```python
def vae(epsilon):
    n=1
    a=(1+1/n)**n
    b=(1+1/n)**(n+1)
    while (b-a)>epsilon:
        n=10*n
        a,b=(1+1/n)**n,(1+1/n)**(n+1)
    return (a,b)
```

Méthode des rectangles et loi normale.py    module1

Console Python

```
*** Python 3.4.5 |Continuum Analytics, Inc.| (default, Jul
 on win32. ***
>>> vae(0.01)
(2.7169239322355936, 2.7196408561678287)
>>> vae(0.00001)
(2.7182804690957534, 2.718283187376222)
>>>
```

**Problème : Une suite de somme de sh**

Soit p un entier naturel non nul. On pose :

$$\forall\, n \geq 2, S_n = \sum_{k=n}^{np} \mathrm{sh}\left(\frac{1}{k}\right)$$

**Partie A : Etude de *sh***

On rappelle ici que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

1) Montrer que $sh$ est impaire.
2) Déterminer la limite de $sh$ en $+\infty$.
3) Montrer que $sh$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans un ensemble à déterminer.
4) Déterminer la bijection réciproque, notée $argsh$, de $sh$.

**Partie B : Une inégalité**

On veut démontrer dans cette partie que :

$$\forall\, x \in \left]0;1\right[, 1 + x \leq e^{sh(x)} \leq \frac{1}{1-x}$$

1) Résoudre l'équation :

$$2sh(x) + 1 = 0$$

2) On pose :

$$u : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto ch^2(x) + sh(x) \end{cases}$$

Montrer que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, u(x) \geq 0$$

3) Etudier les variations sur $\mathbb{R}$ de $f : x \longmapsto e^{sh(x)} - 1 - x$
4) En déduire la double inégalité voulue.

**Partie C : Limite de $S_n$**

1) Montrer que :

$$S_{2,1} = \frac{e-1}{2\sqrt{e}}$$

2) Montrer que :

$$\forall\, n \geq 2, \forall p \in \mathbb{N}^*, k \in [\![n;np]\!], ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq sh\left(\frac{1}{k}\right) \leq ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{k}}\right)$$

3) Démontrer par récurrence que :

$$\forall (a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n, ln(a_1 \times \ldots \times a_n) = ln(a_1) + \cdots + ln(a_n)$$

4) En déduire que :

$$\forall\, n \geq 2, \forall p \in \mathbb{N}^*, ln\left(\frac{np+1}{n}\right) \leq S_n \leq -\,ln\left(\frac{n-1}{np}\right)$$

5) En déduire la limite de $S_{n,p}$ quand n tend vers $+\infty$

**Partie A** :

1) On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \boldsymbol{sh(-x) = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = -sh(x)}$$

2) On a :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

3) On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, sh'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$$

**$sh$ est continue, strictement croissante et $sh(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ par imparité. Donc d'après le corollaire du TVI, $sh$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.**

4) On résout :

$$sh(x) = y \Leftrightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y \Leftrightarrow (e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = y - \sqrt{y^2+1} < 0 \\ ou \\ e^x = y + \sqrt{y^2+1} \end{cases} \Leftrightarrow x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$$

On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{argsh: x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)}$$

**Partie B**

1) On a :

$$2\mathrm{sh}(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow e^x - e^{-x} + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow e^{2x} + e^x - 1 = 0$$

On pose : $X = e^x$

On a alors :

$$X^2 + X - 1 = 0 \Longrightarrow \Delta = 5 > 0$$

Donc $X^2 + X - 1 = 0$ admet deux solutions réelles :

$$\begin{cases} X_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0 \\ X_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} > 0 \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{\mathbf{e^{2x} + e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)}}$$

2) On peut faire cette question de bien des façons.

**M1 : Astuce**

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, ch^2(x) + sh(x) = 1 + sh^2(x) + sh(x) = \left(sh(x) + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0$$

(On peut aussi calculer delta avec le changement de variable $X = sh(x)$)

**M2 : Avec la question précédente :**

On pose :

$$u : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \mathrm{ch}^2(x) + \mathrm{sh}(x) \end{cases}$$

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = 2\mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(x) + \mathrm{ch}(x) = \mathrm{ch}(x)(2\mathrm{sh}(x) + 1)$$

On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}(x) > 0$$

De plus d'après la question précédente on sait que :

$$2\mathrm{sh}(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

Comme la fonction $x \longmapsto 2\mathrm{sh}(x) + 1$ est croissante sur $\mathbb{R}$ on a le tableau de signe ci-contre :

| $x$ | $-\infty$ | | $ln(\frac{-1+\sqrt{5}}{2})$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $u'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $u$ | | $\searrow$ | $u(ln(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}))$ | $\nearrow$ | |

Il reste à calculer :

$$u\left(\ln\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\right) = \mathrm{ch}^2\left(\ln\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\right) + \underbrace{\mathrm{sh}\left(\ln\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)}_{=-\frac{1}{2}}$$

On sait que :

$$2\mathrm{sh}(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

On a donc :

$$\mathrm{sh}\left(\ln\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\right) = -\frac{1}{2}$$

De plus on sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}^2(x) - sh^2(x) = 1 \Longrightarrow \mathrm{ch}^2\left(\ln\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\right) - \frac{1}{4} = 1 \Longrightarrow \mathrm{ch}^2\left(\ln\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\right) = \frac{5}{4}$$

On a donc :

$$\mathrm{ch}^2\left(\ln\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\right) + \mathrm{sh}\left(\ln\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\right) = \frac{5}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

On a alors le tableau ci-contre :

| $x$ | $-\infty$ | $ln(\frac{-1+\sqrt{5}}{2})$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $u'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $u$ | $\searrow$ | $\frac{3}{4}$ | $\nearrow$ |

On en déduit donc que :

$$\boxed{\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}, \mathbf{u(x)} \geq \mathbf{0}}$$

3) On pose $f : x \longmapsto e^{sh(x)} - 1 - x$

$f$ est de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = ch(x)e^{sh(x)} - 1$$

$$\Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) \quad = \left(sh(x) + ch^2(x)\right)e^{sh(x)} = u(x)e^{sh(x)}$$

D'après la question précédente on en déduit que :

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f''(x)$ | $+$ | |
| $f'(x)$ | $\nearrow$ | |

De plus on sait que :

$$f'(x) = ch(x)e^{sh(x)} - 1 \Longrightarrow f'(0) = 0$$

On a donc :

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $+$ | |
| $f'(x)$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ |
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ |

Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0 \Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, e^{sh(x)} \geq 1 + x$$

De plus on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^{sh(-x)} \geq 1 - x$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in ]0;1[, \frac{1}{e^{sh(-x)}} \leq \frac{1}{1-x} \left(\text{car } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ est décroissante sur } ]0;1[\right)$$

On a donc :

$$\boxed{\forall \mathbf{x} \in ]\mathbf{0};\mathbf{1}[, \mathbf{1} + \mathbf{x} \leq \mathbf{e}^{\mathbf{sh(x)}} \leq \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} - \mathbf{x}}}$$

**Partie C** :

1) On a :

$$\boldsymbol{S_{2,1} = sh\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{\frac{1}{2}} - e^{-\frac{1}{2}}}{2} = \frac{\sqrt{e} - \frac{1}{\sqrt{e}}}{2} = \frac{e-1}{2\sqrt{e}}}$$

2) On sait que :

$$\forall n \geq 2, \forall p \in \mathbb{N}^*, k \in [\![n; np]\!], 0 < \frac{1}{k} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} < 1$$

Ainsi on peut appliquer l'égalité démontré à la dernière question de la partie A :

$$\forall x \in ]0;1[, 1 + x \leq e^{sh(x)} \leq \frac{1}{1-x}$$

$$\Rightarrow \forall\ \mathrm{n} \geq 2, \forall \mathrm{p} \in \mathbb{N}^*, \mathrm{k} \in [\![\mathrm{n};\mathrm{np}]\!], 1+\frac{1}{k} \leq e^{sh\left(\frac{1}{k}\right)} \leq \frac{1}{1-\frac{1}{k}}$$

Comme la fonction ln est croissante sur $]0;1[$:

$$\Rightarrow \forall\ \mathrm{n} \geq 2, \forall \mathrm{p} \in \mathbb{N}^*, \mathrm{k} \in [\![\mathrm{n};\mathrm{np}]\!], \ln\left(1+\frac{1}{\mathrm{k}}\right) \leq \ln\left(e^{sh\left(\frac{1}{k}\right)}\right) \leq \ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{\mathrm{k}}}\right)$$

$$\boxed{\Rightarrow \forall\ \mathbf{n} \geq 2, \forall \mathbf{p} \in \mathbb{N}^*, \mathbf{k} \in [\![\mathbf{n};\mathbf{np}]\!], \ln\left(1+\frac{1}{\mathbf{k}}\right) \leq \mathbf{sh}\left(\frac{1}{\mathbf{k}}\right) \leq \ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{\mathbf{k}}}\right)}$$

3) On pose :

$$\forall n \geq 1, \mathcal{P}(n) = \text{« } \forall (a_1,\dots,a_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n, ln(a_1 \times \dots \times a_n) = ln(a_1) + \cdots + ln(a_n) \text{ »}$$

**Initialisation** : $n = 1$ est immédiat

**Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie. On a :

$$\forall (a_1,\dots,a_n,a_{n+1}) \in (\mathbb{R}^{+*})^{n+1}, ln(a_1 \times \dots \times a_n \times a_{n+1}) = \ln\left(\underbrace{a_1 \times \dots \times a_n}_{=A_n} \times a_{n+1}\right) = \ln(A_n a_{n+1})$$

$$= \ln(A_n) + \ln(a_{n+1}) \ (d'après\ une\ propriété\ du\ logarithme)$$

$$= ln(a_1) + \cdots + ln(a_n) + \ln(a_{n+1}) \ (d'après\ l'hypothèse de\ récurrence)$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est héréditaire.

**Conclusion** : On conclut d'après le principe de récurrence.

4) On a :

$$\forall\ \mathrm{n} \geq 2, \forall \mathrm{p} \in \mathbb{N}^*, \sum_{\mathrm{k=n}}^{\mathrm{np}} \ln\left(1+\frac{1}{\mathrm{k}}\right) \leq \sum_{\mathrm{k=n}}^{\mathrm{np}} \mathrm{sh}\left(\frac{1}{\mathrm{k}}\right) \leq \sum_{\mathrm{k=n}}^{\mathrm{np}} \ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{\mathrm{k}}}\right)$$

Or on sait que :

$$\forall\ \mathrm{n} \geq 2, \forall \mathrm{p} \in \mathbb{N}^*, \sum_{\mathrm{k=n}}^{\mathrm{np}} \ln\left(1+\frac{1}{\mathrm{k}}\right) = \ln\left(\prod_{\mathrm{k=n}}^{\mathrm{np}}\left(1+\frac{1}{\mathrm{k}}\right)\right) = \ln\left(\prod_{\mathrm{k=n}}^{\mathrm{np}}\left(\frac{\mathrm{k}+1}{\mathrm{k}}\right)\right) = \ln\left(\frac{\mathrm{n}+1}{\mathrm{n}} \times \frac{\mathrm{n}+2}{\mathrm{n}+1} \times \dots \times \frac{\mathrm{np}+1}{\mathrm{np}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{\mathrm{np}+1}{\mathrm{n}}\right) = \ln\left(\frac{1}{\mathrm{n}} + \mathrm{p}\right)$$

De même on a :

$$\forall\ \mathrm{n} \geq 2, \forall \mathrm{p} \in \mathbb{N}^*, \sum_{\mathrm{k=n}}^{\mathrm{np}} \ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{\mathrm{k}}}\right) = \ln\left(\prod_{\mathrm{k=n}}^{\mathrm{np}}\left(\frac{\mathrm{k}}{k-1}\right)\right) = \ln\left(\frac{\mathrm{np}}{n-1}\right) = -\ln\left(\frac{\mathrm{n}-1}{\mathrm{np}}\right)$$

On a donc :

$$\boxed{\forall\ \mathbf{n} \geq 2, \forall \mathbf{p} \in \mathbb{N}^*, \ln\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}} + \mathbf{p}\right) \leq \boldsymbol{S_n} \leq -\ln\left(\frac{\mathbf{n}-\mathbf{1}}{\mathbf{np}}\right)}$$

5) On sait que :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{np}+1}{\mathrm{n}} = p \\ \lim\limits_{X\to p} \ln(X) = \ln(p) \end{cases} \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{par composée}} \lim \ln\left(\frac{\mathrm{np}+1}{\mathrm{n}}\right) = \ln(p)$$

De même on a :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{n}-1}{\mathrm{np}} = \dfrac{1}{p} \\ \lim\limits_{X\to\frac{1}{p}} \ln(X) = \ln\left(\dfrac{1}{p}\right) \end{cases} \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{par composée}} \lim -\ln\left(\frac{\mathrm{n}-1}{\mathrm{np}}\right) = -\ln\left(\frac{1}{\mathrm{p}}\right) = \ln(\mathrm{p})$$

Donc d'après le théorème des gendarmes, on a :

$$\boxed{\lim_{\mathrm{n}\to+\infty} \mathbf{S_n} = \mathbf{ln(p)}}$$