DS n°1
PCSI 2024-2025
21 septembre 2024

On attachera la plus grande importance à la ***clarté*** *et à la* ***précision*** *de la rédaction, ainsi qu'à la* ***propreté*** *de la présentation, et on veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si on repère ce qui semble être une erreur d'énoncé, on pourra le signaler sur sa copie et poursuivre la composition, en expliquant les raisons de cette initiative.*

Les exercices et les problèmes sont indépendants et peuvent donc être traités dans ***n'importe quel ordre****. Au cours d'un exercice, lorsque l'on ne peut pas répondre à une question, il est* ***vivement recommandé*** *de poursuivre en admettant le résultat que la question demandait de démontrer.*

La calculatrice est (bien sûr !) interdite.

Exercice 1 : Une réciproque

Dans tout cet exercice on pose :

$$f : x \mapsto \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Etudier la parité de f (c'est-à-dire f est-elle paire ? impaire ?).
3) Déterminer la limite de f en 1^-. Quelle conséquence pour la courbe $\mathcal{C}_f$ cela implique t'il ?
4) Calculer f'. En déduire que f réalise une bijection de $]-1;1[$ dans un ensemble à déterminer.
5) Déterminer la bijection réciproque de f, noté f^{-1}.
6) On rappelle ici que :

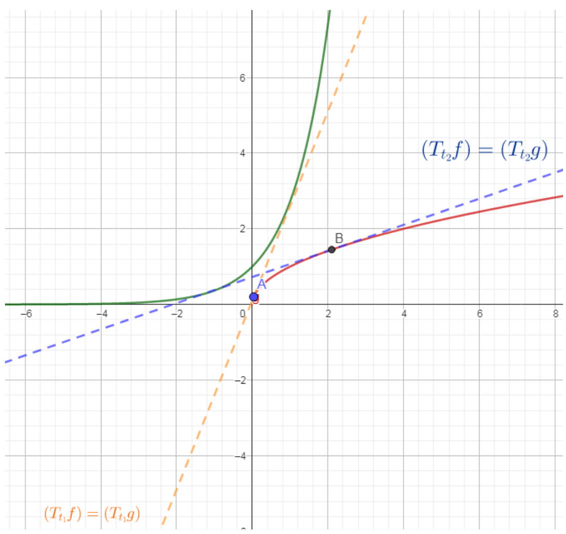
$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} sh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \\ ch(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{cases}$$

Montrer que :

$$f^{-1} : x \mapsto th\left(\frac{x}{2}\right) \ avec\ th : x \mapsto \frac{sh(x)}{ch(x)}$$

Exercice 2 : Tangentes communes

On définit $f : x \mapsto e^x$ et $g : x \mapsto \ln(x)$. On cherche à déterminer le nombre de tangentes communes à leurs courbes respectives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, mais pas nécessairement au même point, comme illustré sur le dessin ci-contre tiré du DS de l'an dernier :



1) Donner l'ensemble de définition de f et de g.
2) Démontrer qu'il existe une tangente (T) à la courbe de $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse $x = a$ et à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $x = b$ si et seulement si :

$$\begin{cases} b = -\ln(a) \\ a\ln(a) - \ln(a) - a - 1 = 0 \end{cases}$$

Dans toute la suite on pose la fonction ϕ définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$\phi : x \mapsto xln(x) - \ln(x) - x - 1$$

3) Démontrer que ϕ est monotone sur $]0;1[$.

4) En déduire qu'il existe un unique $\alpha \in]0;1[$ tel que $\phi(\alpha) = 0$. (On ne cherche pas à déterminer la valeur de α).

5) Montrer que :

$$\forall x > 0, \phi\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\phi(x)}{x}$$

6) En déduire qu'il existe deux tangentes communes à $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$:

_ (T_1) tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $A_1\left(-\ln(\alpha), \frac{1}{\alpha}\right)$ et tangente à $\mathcal{C}_g$ au point $B_1(\alpha, \ln(\alpha))$

_ (T_2) tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $A_2(\ln(\alpha), \alpha)$ et tangente à $\mathcal{C}_g$ au point $B_2\left(\frac{1}{\alpha}, -\ln(\alpha)\right)$

7) On pose :

$$h : x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$$

a) Déterminer l'ensemble de définition de h

b) Démontrer que h est décroissante sur chacun des intervalles de son ensemble de définition.

c) Calculer les limites de $h(x)$ pour $x \to \pm\infty$, et $x \to 1$.

d) Montrer que $\mathcal{C}_h$, la courbe représentative de la fonction h, est symétrique par rapport à la droite (D) d'équation $y = x$. (On dit que h est involutive).

e) Montrer que B_1 et B_2 sont les points d'intersection de $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$

8) Tracer avec soin, et en utilisant des couleurs différentes, $\mathcal{C}_g, \mathcal{C}_f, \mathcal{C}_h, (D), (T_1), (T_2)$ et faites apparaitreA_1, A_2, B_1, B_2.

Problème 1 : Une méthode pour approchée *e*

Le but de ce problème est de déterminer une méthode pour trouver une valeur approchée de $e^1 = e$.

Pour se faire, on va encadrer e par deux fonctions f et g, avec f croissante, g décroissante tels que :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = e$$

Partie A : Etude de *f*

Dans toute cette partie on pose :

$$f : x \mapsto \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \quad sur\ ]0;+\infty[$$

1) Démontrer que f est bien définie et dérivable sur $]0;+\infty[$.

2) Démontrer que $f'(x)$ est du signe de $h_1(x)$ sur $]0;+\infty[$ avec :

$$h_1(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

3) Montrer que :

$$\forall x > 0, h_1'(x) = -\frac{1}{x(x+1)^2}$$

4) En déduire que h_1 est positive sur $]0;+\infty[$.

5) Démontrer que :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

6) En déduire que f est croissante sur $]0;+\infty[$ et que :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = e$$

Partie B : Etude de g

Dans toute cette partie on pose :

$$g: x \mapsto \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1} \quad sur\ ]0;+\infty[$$

1) Démontrer que g est bien définie et dérivable sur $]0;+\infty[$
2) Démontrer que $g'(x)$ est du signe de $h_2(x)$ sur $]0;+\infty[$ avec :

$$h_2(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}$$

3) Démontrer que :

$$\forall x > 0, \ln(1+x) < x$$

4) En déduire que g est décroissante sur $]0;+\infty[$.
5) Démontrer que la droite d'équation $y = e$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}_g$ en $+\infty$.

Remarque : On a ainsi démontrer que :

$$\forall x > 0, f(x) \leq e \leq g(x)$$

De plus on sait que f et g sont respectivement croissante et décroissante et tendent vers e en $+\infty$. Ainsi plus les valeurs de x sont grandes, plus « on se rapproche de e ». On a ainsi :

1	Valeurs de x	Valeur de f(x)	Valeurs de g(x)
2	1	2	4
3	10	2,59374246	2,853116706
4	100	2,704813829	2,731861968
5	1000	2,716923932	2,719640856
6	10000	2,718145927	2,718417741
7	100000	2,718268237	2,71829542
8	1000000	2,718280469	2,718283187
9	10000000	2,718281694	2,718281966

Problème 2 : Une suite de somme de sh

Soit p un entier naturel non nul. On pose :

$$\forall\ \mathrm{n} \geq 2, \mathrm{S}_{\mathrm{n,p}} = \sum_{\mathrm{k=n}}^{\mathrm{np}} \mathrm{sh}\left(\frac{1}{\mathrm{k}}\right) = sh\left(\frac{1}{n}\right) + sh\left(\frac{1}{n+1}\right) + sh\left(\frac{1}{n+2}\right) + \cdots + sh\left(\frac{1}{np-1}\right) + sh\left(\frac{1}{np}\right)$$

On cherche S_p, la limite de $S_{n,p}$ quand $n \to +\infty$

Partie A : Etude de sh

On rappelle ici que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

1) Montrer que sh est impaire.
2) Déterminer la limite de sh en $+\infty$.
3) Montrer que sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans un ensemble à déterminer.
4) Déterminer la bijection réciproque, notée $argsh$, de sh.

Partie B : Une inégalité

On veut démontrer dans cette partie que :

$$\forall\, x \in]0;1[, 1+x \leq e^{sh(x)} \leq \frac{1}{1-x}$$

1) Résoudre l'équation :

$$2sh(x)+1=0$$

2) On pose :

$$u : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto ch^2(x)+sh(x) \end{cases}$$

Montrer que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, u(x) \geq 0$$

3) Etudier les variations sur $\mathbb{R}$ de $f : x \longmapsto e^{sh(x)} - 1 - x$

4) En déduire la double inégalité voulue.

Partie C : Limite de $\mathbf{S_n}$

1) Montrer que :

$$S_{2,1} = \frac{e-1}{2\sqrt{e}}$$

2) Montrer que :

$$\forall\, n \geq 2, \forall p \in \mathbb{N}^*, k \in [\![n;np]\!], ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq sh\left(\frac{1}{k}\right) \leq ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{k}}\right)$$

3) Démontrer par récurrence que :

$$\forall (a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n, ln(a_1 \times \dots \times a_n) = ln(a_1) + \cdots + ln(a_n)$$

4) En déduire que :

$$\forall\, n \geq 2, \forall p \in \mathbb{N}^*, ln\left(\frac{np+1}{n}\right) \leq S_n \leq -\, ln\left(\frac{n-1}{np}\right)$$

5) En déduire la limite de $S_{n,p}$ quand n tend vers $+\infty$