

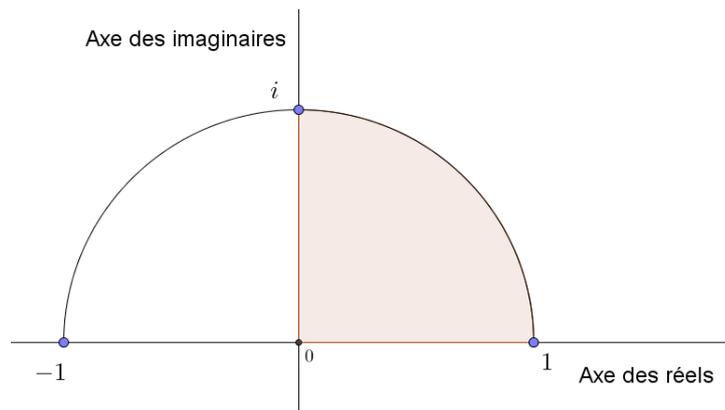
Chapitre 6 : Nombres complexes

Partie A : Une approche géométrique

I) Généralités

a) Un carré pour -1

Définition (nombre imaginaire i) : Si l'on voit la multiplication par -1 comme une rotation autour de la droite des réels d'angle π radians, on peut définir alors un nombre « imaginaire » dont la multiplication est vue comme la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ radians autour de la droite des réels. On obtient alors un nombre i tel que $i^2 = -1$.



Définition (nombre complexe) : A partir de cette définition géométrique, on peut définir une nouvelle catégorie de nombres, les nombres complexes de la forme : $z = a + ib$, avec a et b deux nombres réels.

Nous obtenons ainsi des nombres en « dimension 2 », avec une partie réelle et une partie imaginaire.

Notation : La partie réelle se note $\mathcal{R}e(z)$ et la partie imaginaire $\mathcal{I}m(z)$.

La notation $z = a + ib$ avec $(a ; b) \in \mathbb{R}^2$ s'appelle la forme algébrique de z .

Exemple I.a.1 : Soit $z = 2 + 3i$. Déterminer sa partie réelle et sa partie imaginaire.

Définition (l'ensemble \mathbb{C}) : L'ensemble des nombres complexes est noté en mathématiques \mathbb{C} , de la même façon que les nombres réels sont notés \mathbb{R} .

$$\mathbb{C} = \{a + ib ; (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$$

Ainsi les nombres réels sont inclus dans les nombres complexes, c'est l'ensemble des nombres réels dont la partie imaginaire est nulle.

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Propriété I.a.2 : Pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe un unique couple $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = a + ib$

Corollaire I.a.3 : Soit $(z ; z') \in \mathbb{C}^2$. On a alors : $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{R}e(z) = \mathcal{R}e(z') \\ \mathcal{I}m(z) = \mathcal{I}m(z') \end{cases}$

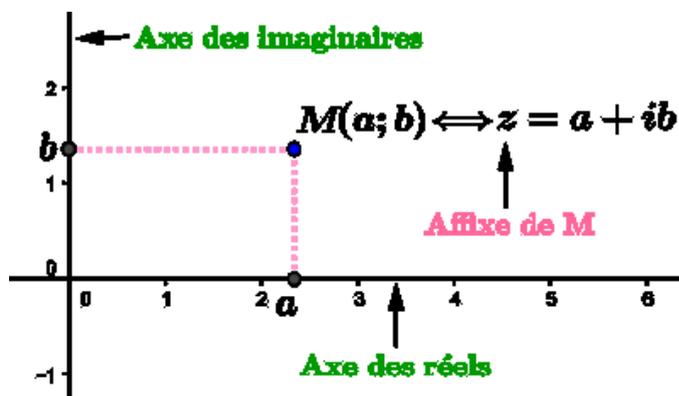
Application I.a.4 : A quelle condition $Z = z^2 + z + 1$ est-il un réel ?

b) Représentation d'un nombre complexe

Dans toute cette partie le plan sera ramené à un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) .

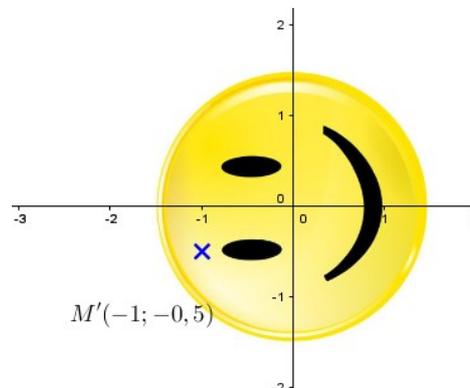
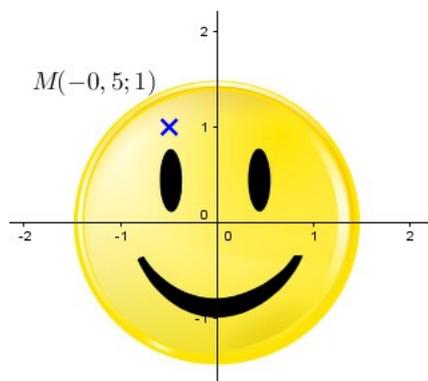
Définition (affixe d'un point) : Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, avec a et b réel (donc z est donné sous sa forme algébrique). Le point $M(a ; b)$ dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) est appelé l'**image** du nombre complexe z . Réciproquement, z est appelé l'**affixe** du point M .

Notation : On note souvent $M(z)$ l'image du nombre complexe z et z_M l'affixe du point M .



Remarque : On peut ainsi utiliser les nombres complexes pour faire de la géométrie du plan, extrêmement pratique notamment pour les rotations.

Application I.b.1 : Soit $M(x; y)$ et $M'(x'; y')$ son image par la rotation de centre $O(0;0)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$ radians. Exprimer les coordonnées de M' en fonction de celles de M .



Remarque : De la même façon, on peut définir l'affixe d'un vecteur $\vec{u}(a; b)$ en posant $z_{\vec{u}} = a + bi$. On a alors pour tout point A et B du plan d'affixe respective z_A et z_B on a :

$$z_{\overline{AB}} = z_B - z_A$$

Exemple I.b.2 : On pose les points $A(2 ; 3)$ et $B(5 ; 1)$. Déterminer l'affixe de $z_{\overline{AB}}$.

Propriété I.b.3 : Soient A et B deux points du plan. Alors l'image C de A par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$ a pour affixe :

$$z_C = z_B + iz_{\overline{BA}}$$

Exemple I.b.4 : Soit $A(2; -3)$ et $C(-1; 2)$. Déterminer l'image de A par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$ radians.

II) Opérations sur \mathbb{C}

a) Prolongement des opérations de \mathbb{R} à \mathbb{C}

Définition : On prolonge les opérations sur les réels aux nombres complexes. La seule règle qui s'ajoute est le fait que $i^2 = -1$.

Exemple II.a.1 : Déterminer les formes algébriques des nombres suivants :

$$z_1 = (2 + 3i) + (4 + 2i); z_2 = (1 - 7i)i; z_3 = (4 - 2i)(5 + 3i)$$

Remarque : Les propriétés algébriques vues au chapitre 5 sont encore valables sur les complexes :

$$1) \forall (x, y) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$2) \forall (x, y) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b) \left(\sum_{k=0}^n a^k b^{n-k} \right)$$

$$3) \forall q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}, \sum_{k=0}^n q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

b) Interprétation géométrique

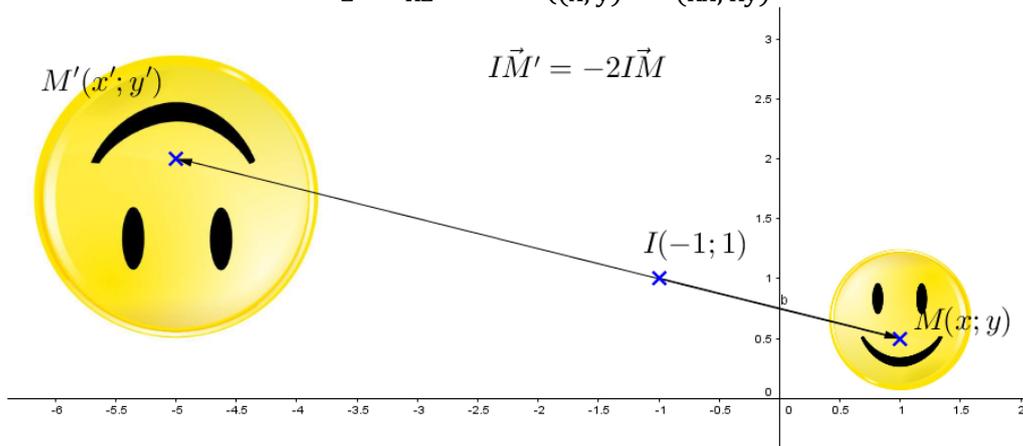
Remarque : L'addition d'un complexe b peut être interprétée géométriquement comme une translation. On peut représenter cela par la transformation suivante :

$$f : \begin{cases} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto z + b \end{cases} \text{ ou } f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x; y) \mapsto (x + \text{Re}(b); y + \text{Im}(b)) \end{cases}$$

Remarque : De même la multiplication par un réel k non nul peut être interprétée géométriquement comme une homothétie de centre O et de rapport k.

On peut représenter cela par la transformation suivante :
Soit b un complexe. Alors :

$$f_b : \begin{cases} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto kz \end{cases} \text{ ou } f_b : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x; y) \mapsto (kx; ky) \end{cases}$$



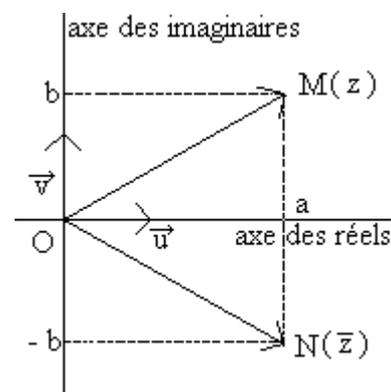
Application II.b.1 : Soit A(5; -2) et C(1; -3). Déterminer l'image de A par l'homothétie de centre C et de rapport -3

c) Conjugué et division par un nombre complexe

Définition : Soit z un nombre complexe et $z = a+ib$ sa forme algébrique. Alors on définit le conjugué de z, appelé \bar{z} , le nombre complexe définie par : $\bar{z} = a - ib$.

Exemple II.c.1 : Déterminer le conjugué des nombres complexes suivants : $z_1 = 2 + 3i; z_2 = -3 - 2i; z_3 = -4 + 5i$

Remarque (interprétation géométrique) : Soit M d'affixe z un point du plan complexe. Alors M' d'affixe \bar{z} est le symétrique de z par rapport à l'axe des abscisses.



Propriété II.c.2 : $\forall z \in \mathbb{C}$ on a $z\bar{z} > 0$ et dès que $z \neq 0$.

Remarque : On se sert du conjugué pour déterminer la forme algébrique d'un quotient de nombres complexes.

Exemple II.c.3 : Déterminer la forme algébrique de :

$$z_1 = \frac{2 + 3i}{1 - 2i}$$

Exemple II.c.4 : On considère le point M d'affixe $z_M = 3 + 2i$. Sur la figure ci-dessous, placer M puis les points d'affixes : $z_1 = z_M + 1 - 3i, z_2 = -z_M, z_3 = \frac{2}{3}z_M, z_4 = \bar{z}_M, z_5 = iz_M$

Application II.c.5 : Résoudre l'équation suivante en donnant la solution sous forme algébrique :

$$2iz + 3 = 4i + 5z$$

Application II.c.6 : Déterminer l'ensemble des nombres complexes tel que :

$$\frac{z-1}{z+2i} \in \mathbb{R} \text{ et } \frac{z-1}{z+2i} \in i\mathbb{R}$$

Proposition II.c.7 : On a les relations suivantes :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad \overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z}'; \quad \overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'; \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$$

Propriété II.c.8 : Soit $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$(1) \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}; \quad (2) \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}; \quad (3) z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z; \quad (4) z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = -z$$

Application II.c.9 : Déterminer l'ensemble des nombres complexes tel que :

$$\frac{z-1}{z+2i} \in \mathbb{R} \text{ et } \frac{z-1}{z+2i} \in i\mathbb{R}$$

III) Fonctions d'une variable réelle à valeur dans \mathbb{C}

Définition : Soit $f: I \rightarrow \mathbb{C}$. La dérivée de la fonction f est définie de la façon suivante : Si $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont dérivables, alors :

$$f' = \operatorname{re}(f)' + i \operatorname{Im}(f)'$$

On note :

$$\mathcal{D}(I, \mathbb{C}) = \mathcal{D}(I) = \{f: I \rightarrow \mathbb{C}; f \text{ est dérivable sur } I\}$$

Exemple III.1 : On pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ x \mapsto x^2 + i \frac{1}{x^2 + 1} \end{cases}$$

Propriété III.2 : Soit $(u; v) \in \mathcal{D}(I, \mathbb{C})^2$. Alors $(\lambda u; (u+v); uv; \frac{u}{v}) \in \mathcal{D}(I, \mathbb{C})^4$ et on a :

- 1) $(u+v)' = u' + v'$
- 2) $(\lambda \times u)' = \lambda u'$
- 3) $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$
- 4) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$