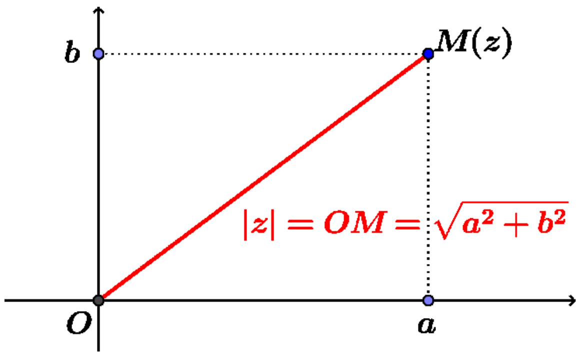
Chapitre 6 : Nombres complexes
Partie B : Module et argument d'un nombre complexe

I) Module d'un nombre complexe

a) Module



Définition : Le module d´un nombre complexe z est la longueur du segment [OM] ,où M est l'image de z dans le plan complexe. On note cela |z|. On a donc :
z [redacted]

Exemple I.a.1 : Déterminer les modules des nombres suivants :

a) $z = 1 + 3i$ b) $z = -2 + i$ c) $z = -4i$

Propriété I.a.2 : On a :
$$\forall\, z \in \mathbb{C}, |z| = |-z| = |\bar{z}|$$

Propriété I.a.3 : On a :
$$\forall\, z \in \mathbb{C}, |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

b) Module et conjugué

Propriété I.b.1 : Pour tout nombre complexe z, on a : $|z|^2 = z\bar{z}$

Propriété I.b.2 : Pour tout nombre complexe z et z´ on a :
(1)$\forall\, (z,z') \in \mathbb{C}^2, |zz'| = |z| \times |z'|$
2) $\forall\, z \in \mathbb{C}^*, \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$
3) $\forall\, z \in \mathbb{C}^*, \forall\, z' \in \mathbb{C}, \left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$

Application I.b.3 **:** On pose la transformation suivante :
$$f : \begin{cases} \mathbb{C}\backslash\{-1\} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \dfrac{2iz - i}{z + 1} \end{cases}$$
Démontrer que si $|f(z)| = 1$, alors z se trouve lui aussi sur un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

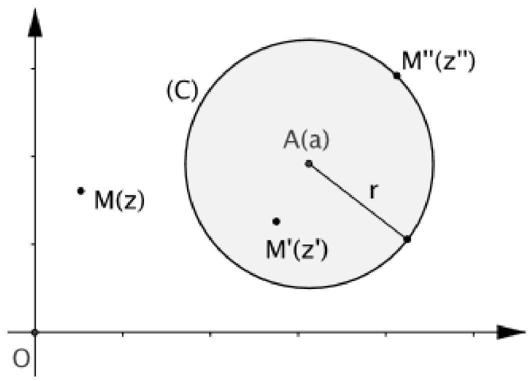
c) Distance entre deux points et interprétation géométrique

Propriété I.c.1 : Soient A et B deux points du plan. On a alors :
$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = |z_B - z_A| = |z_A - z_B|$$

Application I.c.2: Soient trois points A,B et C du plan complexe d'affixes : $z_A = 2 + (\sqrt{3} + 1)i$ $z_B = 1 + i$ et $z_C = 3 + i$
Démontrer que ABC est équilatéral.

Application I.c.3 : Déterminer tous les nombres complexes z tel que $|z - 2 - i| = 1$

Application I.c.4 : Déterminer tous les nombres complexes z tel que $|z-2-i| = |z+3+2i|$



Remarque :

Un point M''(z'') appartient au cercle de centre A(a) et de rayon r si et seulement si :

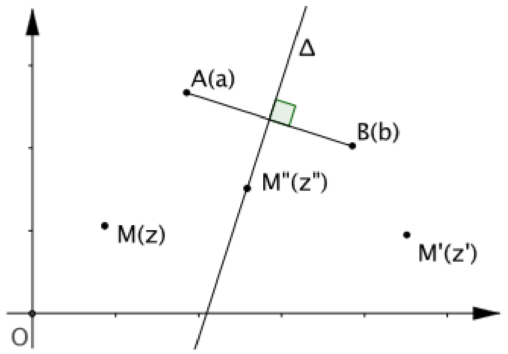
$$|z''-a| = r$$

Un point M'(z') est dans le disque de centre A(a) et de rayon r si et seulement si :

$$|z'-a| \leq r$$

Un point M(z) est en dehors du disque de centre A(a) et de rayon r si et seulement si :

$$|z-a| > r$$



Un point M''(z'') appartient à la médiatrice de [AB] si et seulement si

$$|z''-a| = |z''-b|$$

Les points M'(z') et M(z) sont en-dehors de la médiatrice. Ici :

$$|z'-a| > |z''-b|$$

$$|z-a| < |z-b|$$

d) Inégalité triangulaire

Propriété I.d.1 : On a :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \begin{cases} \mathrm{Re}(z) \leq |z| \\ \mathrm{Im}(z) \leq |z| \end{cases}$$

Propriété I.d.2 (Inégalité triangulaire) :

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}^2, |z+z'| \leq |z| + |z'|$$

Application I.d.3 : Démontrer que :

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, \big||z| - |z'|\big| \leq |z+z'|$$

II) Nombres complexes de module 1 ($\mathbb{U}$)

a) Définition

Définition : On appelle cercle trigonométrique et on note $\mathbb{U}$, l'ensemble des nombres complexes de module 1 :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$$

Propriété II.a.1 :

$$z \in \mathbb{U} \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$$

Application II.a.2 **:** Démontrer que :

$$z \in \mathbb{U}, z \neq 1 \Leftrightarrow \frac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R}$$

b) Notation exponentielle

Propriété II.b.1 : $z \in \mathbb{U} \Leftrightarrow z = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$

On a alors :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}; \exists\theta \in \mathbb{R}, z = \cos(\theta) + i\sin(\theta)\}$$

Notation : Pour tout réel ϑ, on définit : $= \cos(\vartheta) + i\sin(\vartheta)$
On a alors : $\mathbb{U} = \{e^{i\theta};\ \theta \in \mathbb{R}\}$

Exemples II.b.2 : Déterminer la forme algébrique des nombres complexes : $z_1 = e^{\frac{i\pi}{4}}, z_2 = e^{-5\frac{i\pi}{6}},\ z_2 = e^{i\pi}$

Exemple II.b.3 : Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes suivant :

$$z_1 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, z_2 = 1, z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

c) Propriété de la notation exponentielle

Propriété II.c.1 : $\forall(\vartheta, \vartheta') \in \mathbb{R}^2, e^{i\vartheta} \times e^{i\vartheta'} = e^{i(\vartheta+\vartheta')}$

Application II.c.2 **:** Déterminer les valeurs de

$$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) \text{ et } \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$$

Propriété II.c.3:

$$\forall\vartheta \in \mathbb{R}, \frac{1}{e^{i\vartheta}} = e^{-i\vartheta} = \overline{e^{i\vartheta}}$$

$$\forall(\vartheta, \vartheta') \in \mathbb{R}^2, \frac{e^{i\vartheta}}{e^{i\vartheta'}} = e^{i(\vartheta-\vartheta')}$$

Application II.c.4 **:** Déterminer les valeurs de

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

Propriété II.c.5: Soit $(\theta; \theta') \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$e^{i\vartheta} = e^{i\vartheta'} \Leftrightarrow \theta = \vartheta' (\text{à } 2\pi - \text{près}) \Leftrightarrow \theta \equiv \vartheta'\ [2\pi]$$

d) Formule de Moivre

Propriété II.d.1 (Formule de Moivre) :

$$\forall\vartheta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, \left(\cos(\vartheta) + i\sin(\vartheta)\right)^n = \left(e^{i\theta}\right)^n = \cos(n\vartheta) + i\sin(n\vartheta)$$

Application II.d.2 **:** Déterminer la forme algébrique du nombre complexe suivant :

$$a = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^{2024}$$

Application II.d.3 **:** Démontrer que

$$\forall\vartheta \in \mathbb{R}, \cos(3\vartheta) = 4\cos^3(\vartheta) - 3\cos(\vartheta)$$

Application II.d.4 : Simplifier : $\forall\ \theta \in \mathbb{R}, \forall\ n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = 1 + \cos(\theta) + \cos(2\theta) + \ldots + \cos(n\theta) = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$$

$$W_n = \sin(\theta) + \sin(2\theta) + \ldots + \sin(n\theta) = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$$

Application II.d.5 : Calculer :

$$\sum_{k=0}^{11} \cos\left(\frac{\pi k}{12}\right)$$

Application II.d.6 : Résoudre sur $\mathbb{R}$: $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = 0$

d) Formule d'Euler et application

Propriété II.e.1 (Formule d'Euler) :

$$\forall \vartheta \in \mathbb{R}, \begin{cases} \cos(\vartheta) = \dfrac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2} \\ \sin(\vartheta) = \dfrac{e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}}{2i} \end{cases}$$

Application II.e.2 **:** Démontrer que

$$\forall \vartheta \in \mathbb{R}, \cos^2(\vartheta) = \frac{1}{2}\cos(2\vartheta) + \frac{1}{2}$$

Application II.e.3 **:** Déterminer une primitive de $f : x \mapsto sin(x)^4$

Application II.e.4 **:** Démontrer que

$$\forall \vartheta \in \mathbb{R}, \left|1 + e^{i\vartheta}\right| = 2\left|\cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\right|$$

Application II.e.5 **:**

$$\forall (p, q) \in \mathbb{R}^2, \cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

III) Argument d'un nombre complexe

a) Retour à $\mathbb{U}$

Proposition III.a.1 : Pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$, il existe un couple $(r; \vartheta) \in]0; +\infty[\times \mathbb{R}$ tel que $z = re^{i\vartheta}$.

Définition : Soit z un nombre complexe non nul. On appelle argument du nombre complexe z, noté arg(z), tout réel ϑ tel que :

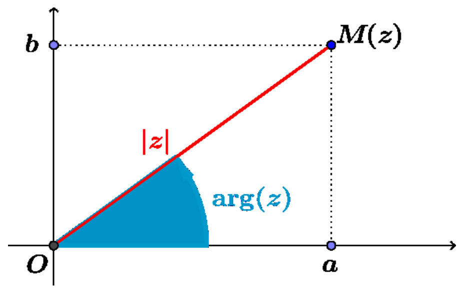
$$\frac{z}{|z|} = e^{i\vartheta}$$

ATTENTION : L'argument d'un nombre complexe n'est pas unique !!! (seulement à 2π-près).

Remarque : 0 est le seul nombre complexe qui n´a pas d´argument.

Interprétation géométrique : Soit M un point du plan complexe d'affixe z. On a alors :

$$\arg(z) = (\vec{\imath}; \overrightarrow{OM})$$



Propriété III.a.2 : Pour tout nombre complexe non nul z=a+ib, d´argument θ=Arg(z), on a :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{a}{|z|} \\ \sin(\theta) = \dfrac{b}{|z|} \end{cases}$$

Application III.a.3 : Déterminer un argument du nombre complexe :

$$z = 1 + i\sqrt{3}$$

b) Propriété géométrique de l'argument

Proposition III.b.1 : Soient A et B deux points du plan. On a alors :

$$(\vec{\imath}; \overrightarrow{AB}) = arg(z_B - z_A)$$

Proposition III.b.2: Soit A, B, C trois points du plan. On a alors :

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = arg(z_c - z_A) - arg(z_B - z_A)$$

Application III.b.3 **:** Soient A(2 ;3), B(4 ;5) et C(3 ;3+$\sqrt{3}$). Déterminer la mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$

c) Forme exponentielle

Définition/Proposition III.c.1 :

$$\forall\, z \in \mathbb{C}^*, \begin{cases} |z| = r \\ arg(z) = \vartheta(\text{à } 2\pi - \text{près}) \end{cases} \Leftrightarrow z = re^{i\vartheta}, r > 0$$

$z = re^{i\vartheta}$ s'appelle la forme exponentielle de z.

Remarque : Grâce à cette proposition, on a immédiatement la propriété suivante :

Propriété III.c.2 : $\forall\, (z, z') \in (\mathbb{C}^*)^2, \arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$

Application III.c.3 : Déterminer un argument du nombre complexe :

$$z = (2 + 2i)(1 - \sqrt{3}i)$$

Remarque : On peut alors caractériser les rotations grâce à l'exponentielle.

Application III.c.4 **:** Soit A(2 ;3). Déterminer l'image de A par la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de centre B(-2 ;-1)

Application III.c.5 **:** $\forall\, (z, n) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{N}, \arg(z^n) = n \arg(z)$

Propriété III.c.6 :

$$\forall\, (z, z') \in (\mathbb{C}^*)^2, \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$$

***Application III.c.7* :** Déterminer un argument de :

$$z = \frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}$$

Remarque : Cela est très pratique pour calculer des mesures d'angles.

***Application III.c.8* :** On considère trois points A, B et C d´affixes respectives a=1-i, b=4 et c=3-2i. Déterminer une mesure de l´angle $\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)$.

Propriété III.c.9 :

$$\forall\, z \in \mathbb{C}^*, \arg(\bar{z}) = -\arg(z)\ \ (\text{à } 2\pi - \text{près})$$

***Application III.c.10* :** $\forall\,(z,z') \in (\mathbb{C}^*)^2, \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg\left(z \times \overline{z'}\right)$

IV) Exponentielle complexe

a) Définition

Définition : Soit $z \in \mathbb{C}, z = a + ib, (a;b) \in (\mathbb{R})^2$. On définit alors :

$$e^z = e^{a+ib} = e^a(\cos(b) + i\sin(b))$$

Exemple : Déterminer la forme algébrique de $e^{2+\frac{\pi}{2}i}$

Propriété IV.a.1 : Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors :

$$\begin{cases} |e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)} \\ \arg(e^z) = \mathrm{Im}(z)\ (\text{à } 2\pi - \text{près}) \end{cases}$$

b) Propriétés

Propriété IV.b.1 : L'exponentielle complexe conserve toutes les propriétés de l'exponentielle réel :

$\forall\,(z,z') \in (\mathbb{C})^2, e^{z+z'} = e^z \times e^{z'}$

$$\forall\, z \in \mathbb{C}, \frac{1}{e^z} = e^{-z}$$

$$\text{Soit } (z,z') \in (\mathbb{C})^2, e^z = e^{z'} \Leftrightarrow z = z' + 2ik\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Application IV.b.2 : Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation :

$$e^z = 1 + i$$