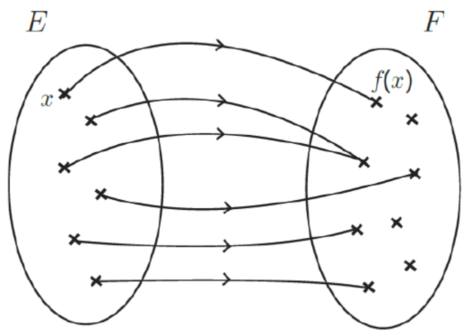
**Chapitre 7 : Vocabulaire ensembliste**
**Partie B : Applications**

## I) Généralités sur les ensembles

### a) Vocabulaire




**Définition** : Soient E et F deux ensembles. On dit que $f$ est une application de E dans F lorsqu'à tout élément x de E, $f$ associe un unique élément de F, appelé **image de x par $f$** et noté $f(x)$. E est appelé **ensemble de départ** et F est **l'ensemble d'arrivée** de $f$. On note :

$$f:\begin{cases} E \to F \\ x \longmapsto f(x) = y \end{cases}$$

Si y est un élément de F, on dit que x est un antécédent de y par f lorsque y = f(x).

**Exemple I.a.1** : On pose :

$$f : \begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto i \times z + 2 - 3i \end{cases} \qquad g : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x; y) \longmapsto x^2 + y^2 - 1 \end{cases}$$

**Définition (graphe)** : On appelle **graphe** de l'application $f$ le sous-ensemble Γ de E×F définit par :

$$\Gamma = \{(x; f(x))\ ; x \in E\}$$

**Notation** : L'ensemble des applications de E dans F est noté : $\mathcal{F}(E; F)$ ou $F^E$.
Ainsi on a :

$$g: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x; y) \longmapsto x^2 + y^2 - 1 \end{cases} \Longrightarrow g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$$

**Définition (famille finie)** : Soit E un ensemble et I un ensemble fini (bien souvent : $I = [\![1; n]\!]$ ou $I = [\![0; n]\!]$). On appelle famille d'éléments de E indexée par I toute application de I dans E. On note $(x_i)_{i \in I}$ une telle famille (Comme dans le chapitre 2 pour le calcul de la somme).

**Définition (Egalité d'application) :** Soit $(f; g) \in \mathcal{F}(E; F)^2$. On dit alors naturellement que $f = g$ si et seulement si :

$$\forall\, x \in E, f(x) = g(x)$$

### b) Identité et indicatrice

**Définition (Fonction identité)** : On appelle application identité d'un ensemble E, l'application de E dans E définit par :

$$\mathrm{Id}_E: \begin{cases} E \to E \\ x \longmapsto f(x) = x \end{cases}$$

**Exemple I.b.1** :

$$f: \begin{cases} [0; 1] \to [0; 1] \\ x \longmapsto f(x) = x \end{cases}$$

**Définition (Fonction indicatrice de A)** : Soit A un sous-ensemble d'un ensemble E. On appelle fonction indicatrice de A l'application suivante :

$$\mathbf{1}_A : \begin{cases} E \to E \\ x \longmapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ sinon } (x \notin A) \end{cases} \end{cases}$$

**Exemple I.b.2**: Tracer le graphe de $\mathbf{1}_{[-2;3[}$.

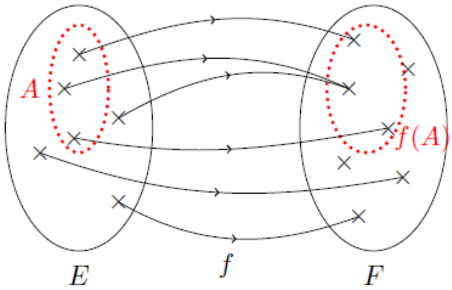
**Propriété I.b.3** : Pour tout A et B sous-ensembles d'un ensemble E on a :
- $\mathbf{1}_A^2 = \mathbf{1}_A$
- $\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$
- $\mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_{A \cap B}$

***Application I.b.4*** : Montrer que :

$$\begin{cases} A\cup B = A\cup C \\ A\cap B = A\cap C \end{cases} \Leftrightarrow B = C$$

**Remarque** : Dans toute la suite de ce cours, E et F sont des ensembles quelconques et $f \in \mathcal{F}(E;F)$.

## c) Image direct et réciproque




**Définition (Image direct)** : Soit X un sous-ensemble de E. On appelle **l'image de X** par f le sous-ensemble de Y suivant :

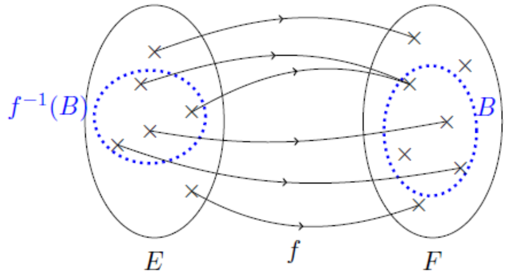
$$f(X) = \{y \in F\ ;\ \exists x \in E, f(x) = y\} = \{f(x); x \in E\}$$

**Exemple I.c.1** : Déterminer l'image direct de $[-3;2]$ par l'application :

$$g: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^4 \end{cases}$$

***Application I.c.2*** : Soient A et B deux sous-ensembles de E. Montrer que :

$$f(A\cap B) \subset f(A)\cap f(B)$$




**Définition (Image réciproque)** : Soit Y un sous-ensemble de F. On appelle image réciproque de Y par f le sous-ensemble :

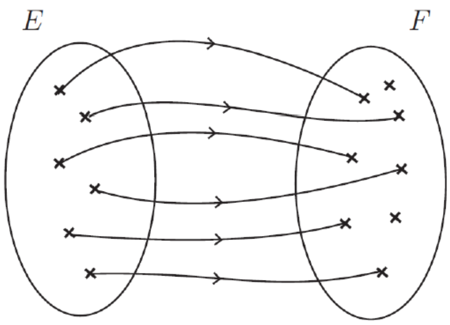
$$f^{-1}(Y) = \{x \in E\ ;\ f(x) \in Y\}$$

**Exemple I.c.3** : Déterminer l'image réciproque de [4 ;9] puis de [-3 ;-1] par :

$$g: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$$

# II) Injection, surjection et bijection

## a) Injection




**Définition (Injection)** : Soit $f \in \mathcal{F}(E;F)$. On dit que *f* est injective (ou *f* est une injection) si et seulement si chaque élément de F admet au plus un antécédent dans E.

**Exemple II.a.1** : Montrer que l'application suivante n'est pas injective :

$$g: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$$

**Propriété II.a.2** : Soit $f \in \mathcal{F}(E;F)$ est injective si et seulement si :

$$\forall\ (x_1;x_2) \in E^2, f(x_1) = f(x_2)\ \Longrightarrow x_1 = x_2$$

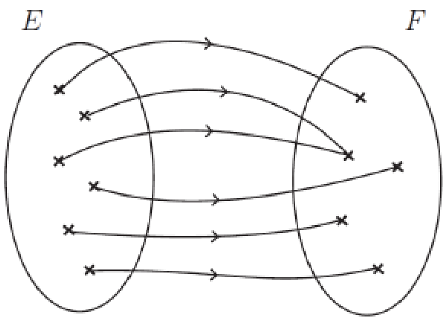
***Application II.a.3*** : Montrer que g est injective avec :

$$g: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y) \longmapsto (x, x+y, x-y) \end{cases}$$

***Application II.a.4*** : Démontrer l'équivalence suivante :

$$f \text{ est injective sur } E\ \Leftrightarrow \forall (A,B) \in \mathcal{P}(E), f(A\cap B) = f(A)\cap f(B)$$

## b) Surjection




**Définition (Surjection)** : Soit $f \in \mathcal{F}(E;F)$. On dit que *f* est surjective (ou *f* est une surjection) si et seulement si chaque élément de F admet un antécédent dans E : $\forall\ y \in F, \exists\ x \in E, f(x) = y$

**Exemple II.b.1** : Montrer que l'application suivante est surjective :

$$g : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto x - y \end{cases}$$

**Remarque** : Pour montrer qu'une application est surjective, on prend un élément y de F et on montre qu'il est l'image d'un élément x de E.

***Application II.b.2*** : L'application suivante est-elle surjective ?

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow [-1; 1[ \\ x \longmapsto \dfrac{|x| - 1}{|x| + 1} \end{cases}$$

**Propriété II.b.3** : Soit Y un sous-ensemble de F. Si f est surjective alors :

$$f\left(f^{-1}(Y)\right) = Y$$

## c) Application bijective

**Définition (bijection)** : On dit que f est bijective si elle est injective et surjective :

$$\forall\, y \in F, \exists!\ x \in E, f(x) = y$$

**Exemple II.c.1 :** Montrer que g est bijective avec :

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 3x + 2 \end{cases}$$

***Application II.c.1*** : Montrer que $f$ est bijective avec :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x; y) \longmapsto (y; x + y) \end{cases}$$

***Application II.c.2*** : Montrer que l'application suivante n'est pas bijective :

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow [-1; 1] \\ x \longmapsto \dfrac{|x| - 1}{|x| + 1} \end{cases}$$

## d) Restriction d'application et prolongement

**Définition (restriction)** : Soit A un sous-ensemble de E. On pose restriction de f à A, noté $f_{|A}$, l'application définie de A dans F par :

$$\forall\, x \in A, f_{|A}(x) = f(x)$$

Ceci nous permet par exemple de travailler avec des applications qui sont bijectives sur un sous-ensemble de A.

**Exemple** : la fonction $\cos_{|[0;\pi]}$ est une bijection de [0 ;π] dans $[-1; 1]$.

**Définition (prolongement)** : Soit A un sous-ensemble de E et $f \in \mathcal{F}(A; F)$. On appelle prolongement de f, noté $\bar{f}$, toute application tel que :

$$\forall\, x \in A, \bar{f}(x) = f(x)$$

**Exemple II.d.1** : On pose :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{x} \end{cases}$$

Voici alors deux prolongements de f sur ℝ.

$$\bar{f}_1 : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 \text{ sinon} \end{cases} \end{cases} \quad \text{et} \quad \bar{f}_2 : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 3 \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

## III) Composée de fonction

### a) Notation

**Définition** : Soient E, F et G trois ensembles, $f \in \mathcal{F}(E;F)$ et $g \in \mathcal{F}(F;G)$. On appelle **application composée** l'application noté $(g \text{ o } f)$ de E dans G tel que :

$$\forall x \in E, (g \text{ o } f)(x) = g(f(x))$$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r] \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & F \arrow[r] \arrow[r, bend left, "g"] & G \end{tikzcd}$$

**Exemple III.a.1** : On pose :

$$g: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 3x+2 \end{cases} \quad \text{et } f: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^3 \end{cases}$$

Déterminer $h_1 = (g \text{ o } f)$ et $h_2 = (f \text{ o } g)$

**Exemple III.a.2** : Ecrire la fonction suivante à l'aide de la composée de deux applications :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln(1+x^2) \end{cases}$$

### b) Propriétés

**Propriété III.b.1** : Soient E, F, H et H quatre ensembles. On a :
- $\forall f \in \mathcal{F}(E;F), f \text{ o } d_E = f$
- $\forall f \in \mathcal{F}(E;F), id_F \text{ o } f = f$
- (**Associativité**) $\forall f \in \mathcal{F}(E;F), \forall g \in \mathcal{F}(F;G) \forall h \in \mathcal{F}(G;H), (h \text{ o } g) \text{o } f = h \text{ o } (g \text{ o } f)$

**Propriété III.b.2** : Soient E, F deux ensembles tels que $f \in \mathcal{F}(E;F)$ et $g \in \mathcal{F}(F;G)$. On a :
- f et g injectives $\Rightarrow$ g o f injective

g o f injective $\Rightarrow$ f injective
- f et g surjectives $\Rightarrow$ g o f surjective

g o f surjective $\Rightarrow$ g surjective
- f et g bijectives $\Rightarrow$ g o f bijective
  g o f bijective $\Rightarrow$ f injective et g surjective

**Définition (Application réciproque)** : Soit $f \in \mathcal{F}(E;F)$ une application bijective. Alors on peut définir son application réciproque, notée $f^{-1}$, appelé **bijection réciproque** de f et définie de F dans E par :

$$f^{-1}: \begin{cases} F \longrightarrow E \\ y \longmapsto f^{-1}(y) = \text{l'unique antécédent de } y \text{ par } f \end{cases}$$

$$\forall (x;y) \in E \times F, f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$$

**Exemple III.b.3** : Déterminer la bijection réciproque de :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 3x+2 \end{cases} \quad \text{et} \quad g: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x;y) \longmapsto (2x+y; x-3y) \end{cases}$$

**Propriété III.b.4** : Soient E, F deux ensembles tels que $f \in \mathcal{F}(E;F)$. On a alors :

$$f \text{ est bijective } \Leftrightarrow \exists\, g \in \mathcal{F}(F;E) \text{ tel que } \begin{cases} f \text{ o } g = Id_E \\ g \text{ o } f = Id_F \end{cases}$$

g est alors unique et est la bijection réciproque de f.

***Application III.b.5*** : Montrer que l'application suivante est bijective :

$$g: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x;y) \longmapsto (x+y; x-y) \end{cases}$$

**Propriété III.b.6** : Soient $f \in \mathcal{F}(E;F)$ et $g \in \mathcal{F}(F;G)$ deux applications bijectives. Alors g o f est bijective et :

$$(g \text{ o } f)^{-1} = f^{-1} \text{ o } g^{-1}$$

Si f est bijective, alors $f^{-1}$ est aussi bijective et :

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

***Application III.b.7*** : On pose :

$$g: \begin{cases} [0;+\infty[ \longrightarrow [0;+\infty[ \\ x \longmapsto x^2 \end{cases} \quad \text{et } f: \begin{cases} [0;+\infty[ \longrightarrow [1;+\infty[ \\ x \longmapsto e^x \end{cases}$$

Montrer que f et g sont bijectives et déterminer la fonction réciproque de f o g.