Chapitre 7 : Vocabulaire ensembliste
Partie A : Ensemble

I) Vocabulaire

a) Notations

Définition (Ensemble) : Un ensemble en mathématiques est une collection d'objets, ces derniers sont appelés ses éléments. On note souvent cela à l'aide d'accolade {} (mais aussi à l'aide de crochets ou de doubles crochets pour les nombres réels ou entiers).

Exemple I.a.1 : E ={0 ;1}, Ω = {Pile ; Face}, $\mathbb{N}$={0 ;1 ;2 ;3 ;…}, $A = \{0; 1; \dots ; 10\} = [\![0; 10]\!], I = [0; 5]$.

Remarque 1 :
- Un ensemble qui ne contient aucun élément est appelé ensemble vide et noté : $\emptyset$.
- Si x est un élément d'un ensemble E on note alors : $\mathbf{x \in E}$ et sinon : $\mathbf{x \notin E}$.
- Si E ne contient qu'un unique élément, on appelle cela un *singleton*, $E = \{a\}$.

Exemple I.a.2 : Soit E l'ensemble des nombres qui sont à la fois pairs et impairs. Déterminer E.

Exemple I.a.3 : $9{,}4 \in [0; 10]$ *mais* $9{,}4 \notin [\![0; 10]\!]$

Application I.a.4 : Soit E l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, qui sont à la fois paires et impaires. Déterminer E.

b) Définition d'un ensemble

Définition par proposition : On peut définir un ensemble E à l'aide d'une proposition, cette dernière n'étant vérifiée par tous les éléments de E, et seulement eux.

Exemples I.b.1 : Déterminer les ensembles suivants :

$E = \{x \in \mathbb{R}$ **tel que** $|x - 2| < 3\}$ $\quad$ $F = \{z \in \mathbb{C} ; |z - 2| < 3\}$ $\quad$ $G = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists p \in \mathbb{N}\ p^2 = n\}$

Exemple I.b.2 : On pose : $E = \{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})\ \boldsymbol{tq}\ f(0) = 1\}$. Déterminer trois éléments de E.

Définition par expression : On peut définir un ensemble E à l'aide d'une expression $f(t)$, où tous les éléments x de E peuvent s'exprimer à l'aide d'un élément t d'un autre ensemble B tel que $x = f(t)$.
On pose $E = \{f(t)\ tel\ que\ t \in B\}$.

$$x \in E \Leftrightarrow \exists t \in B\ tel\ que\ f(t) = x$$

Exemple I.b.3 : Déterminer les ensembles suivants :

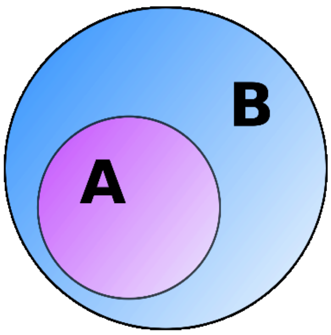
$E = \{5 + 6i + 2e^{i\theta}, \theta \in [2\pi ; 3\pi]\}$ $\quad$ $F = \left\{\frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$ $\quad$ $G = \{ch(t), t \in \mathbb{R}\}$

c) Inclusions

Définition (Inclusion) : On dit que A est inclus dans B, noté A⊂B si tout élément de A est un élément de B :

$$(A \subset B) \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

On dit alors que A est un sous-ensemble de B ou que A est une partie de B.



Remarque : Pour démontrer qu'un ensemble A est inclus dans un autre ensemble B, il suffit de prendre n'importe quel élément de A et de montrer qu'il est dans B.

Exemple I.c.1 : Montrer que :

$$\left\{\frac{1}{2}+ib\,;b\in\mathbb{R}\right\}\subset\{z\in\mathbb{C},z(z-1)\in\mathbb{R}\}$$

Remarque : Pour montrer que deux ensembles A et B sont égaux, il suffit de montrer que A ⊂ B et B ⊂ A.

Application I.c.2 : Soit A=$\{x\in\mathbb{R};x^2<x\}$. Montrer que A=]0 ;1[.

Attention : Il faut alors différencier l'inclusion ⊂ et l'appartenance ∈. On peut passer de l'une à l'autre en utilisant l'ensemble des parties d'un ensemble.
On note $\mathcal{P}$(B) l'ensemble des parties de B.

$$A\subset B\Leftrightarrow A\in\mathcal{P}(B)$$

Exemple : $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}\in\mathcal{P}(\mathbb{C})$.

Application I.c.3 : Déterminer toutes les parties de E = {a ;b ;c}

II) Union, intersection et complémentaire

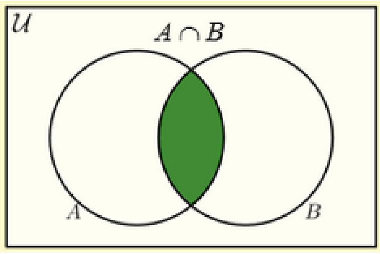
a) Union et intersection

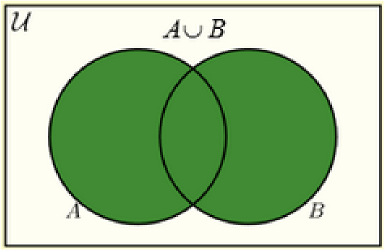
Définition (Union) : A ∪ B, se lit « A union B », est l'ensemble composé des éléments de A et de B réunis.

$$A\cup B=\{x\in A\ \textbf{ou}\ x\in B\}$$

A ∩ B se lit « A inter B », est l'ensemble composé des éléments qui appartiennent à A et B.

$$A\cap B=\{x\in A\ \textbf{et}\ x\in B\}$$





Exemple II.a.1 : $\{0;1;2\}\cup\{1;2;7\}=\{0;1;2;7\}$ et $\{0;1;2\}\cap\{1;2;7\}=\{1;2\}$

Notation : Si on dispose d'une famille d'ensemble $(A_i)_{1\leq i\leq n}$, on note l'union (ou l'intersection) de tous les éléments par :

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i\quad\text{ou}\quad\bigcap_{i=1}^{n}A_i$$

Application II.a.2 : Déterminer :

$$\bigcup_{i=1}^{19}\left]1-\frac{1}{i};1+\frac{1}{i}\right[\quad\text{et}\quad\bigcap_{k=1}^{19}\left]1-\frac{1}{k};1+\frac{1}{k}\right[$$

Proposition II.a.3 (règle de calcul) : Soient A, B et C des sous-ensembles d'un ensemble E. On a alors :

- (Commutativité) $A\cap B=B\cap A$ et $A\cup B=B\cup A$
- (Associativité) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$ et $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$ (On peut écrire sans ambiguïté : $A\cap B\cap C$ et $A\cup B\cup C$
- (Eléments neutres) E est un élément neutre pour l'intersection : $\forall A\in\mathcal{P}(E), A\cap E=A$

∅ est un élément neutre pour l'union : $\forall A\in\mathcal{P}(E), A\cup\emptyset=A$.

- (Distributivité de l'union par rapport à l'intersection et vis verca) :

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)\quad\text{et}\ A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

b) Ensembles disjoints et partition

Définition (ensembles disjoints) : Soit E un ensemble et $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$. On dit que A et B sont disjoints si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

Exemple II.b.1 : Déterminer un ensemble E et deux ensembles A et B de E, disjoints.

Définition (recouvrement disjoint, partition) : Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties d'un ensemble E. On dit que $(A_i)_{i \in I}$ forment un recouvrement disjoint de E si et seulement si :

- $(A_i)_{i \in I}$ recouvre E :

$$E = \bigcup_{i \in I} A_i$$

- Les ensembles A_i sont deux à deux disjoints :

$$\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$$

Si aucun des A_i n'est vide, on parle alors de partition de E.

Exemple II.b.2 : On considère $A = [0; 1[\quad B = [1; 2], C = \left]\frac{1}{2}; 1\right]$. (A, B, C) forment-elle une partition de $[0; 2]$?

Remarque : On se sert souvent d'une partition en dénombrement ou en probabilité. On découle de cela la loi des probabilités totales !

c) Privation et complémentaire

Définition (Privation) : En Mathématiques lorsque l'on désigne un ensemble « amputé » de certains de ses éléments, on utilise la notation \.

Exemple II.c.1 : Déterminer $\mathbb{R} \backslash \{0,1\}$.

Définition (Complémentaire) : Soit A un sous-ensemble d'un ensemble E. On désigne le complémentaire de A, noté $\overline{\mathrm{A}}$ ou $\mathrm{E} \backslash \mathrm{A}$ ou $\complement_{\mathrm{E}}^{\mathrm{A}}$, l'ensemble :

$$\overline{\mathrm{A}} = \mathrm{E} \backslash \mathrm{A} = A^c = \{\mathrm{x} \in \mathrm{E} \,; \mathrm{x} \notin \mathrm{A}\}$$

Exemple II.c.2 : Déterminer $[0; 1]^c$ sur $\mathbb{R}$.

Application II.c.3 : Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. Montrer que :
1) $\overline{\mathrm{A}} \cup \overline{\mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A} \cap \mathrm{B}}$ 2) $\overline{\overline{\mathrm{A}}} = \mathrm{A}$ 3) $\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \Leftrightarrow \overline{\mathrm{A}} \supset \overline{\mathrm{B}}$

III) Produit cartésien d'ensembles

a) Généralités

Définition (Produit cartésien) : Soient E et F deux ensembles. Le produit cartñesien $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$ est l'ensemble des couples (x ;y) tel que $\mathrm{x} \in \mathrm{E}$ et $\mathrm{y} \in \mathrm{F}$.

Exemple III.a.1 : Déterminer $[0; 1] \times [-2; 3]$.

Remarque : Si E = F on trouve la notation $\mathrm{E} \times \mathrm{F} = \mathrm{E}^2$. De la même manière, on peut définir $E^n = E \times E \times \ldots \times E$.

Exemple III.a.2 : Déterminer un élément de $[\mathcal{C}^0(\mathbb{R})]^3$.

b) Propriété algébrique du produit cartésien

Proposition III.b.1 : Soient A,B,C et Ddes parties d'un ensemble E. On a alors :

$$(\mathrm{A} \times \mathrm{C}) \cup (\mathrm{A} \times \mathrm{D}) = \mathrm{A} \cup (\mathrm{C} \cup \mathrm{D})$$
$$(\mathrm{A} \times \mathrm{C}) \cap (\mathrm{B} \times \mathrm{D}) = (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \times (\mathrm{C} \cap \mathrm{D})$$

Remarque et contre-exemple III.b.2 : En général $(\mathrm{A} \times \mathrm{C}) \cup (\mathrm{B} \times \mathrm{D})$ n'est pas égale à $(\mathrm{A} \times \mathrm{B}) \cup (\mathrm{C} \times \mathrm{D})$. Trouver un contre-exemple !