

## TD 7 : Vocabulaire ensembliste

### Partie A : Ensemble

**Exercice A.1 :** Démontrer que :

$$A = B \Leftrightarrow A \cup B = A \cap B$$

**Exercice A.2 :** Démontrer que :

$$A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A \subset C$$

**Exercice A.3 :** Soient A, B et C trois ensembles. Démontrer que :

$$\begin{cases} A \cup B \subset A \cup C \\ A \cap B \subset A \cap C \end{cases} \Rightarrow B \subset C$$

**Exercice A.4 :** Enumérer :  $\mathcal{P}(\{1; 2; 3; 4\})$

**Exercice A.5 :** Soient E et F deux ensembles. Déterminer une relation entre :

a)  $\mathcal{P}(E \cup F)$  et  $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$

b)  $\mathcal{P}(E \cap F)$  et  $\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$

c)  $\mathcal{P}(E \times F)$  et  $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$

**Exercice A.6 :** Soit A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E. Montrer que :

$$A \subset B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$$

**Exercice A.7 :** Montrer que :

a)  $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$

b)  $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$

**Exercice A.8 :** Soient  $(A_i)_{i \in I}$  et  $(B_i)_{i \in I}$  deux familles de sous ensembles de E tel que :

$$\forall i \in I, E = A_i \cup B_i$$

Montrer que :

$$E = \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right) \cup \left( \bigcap_{i \in I} B_i \right)$$

### Partie B : Applications

**Exercice B.1 :** Soit E un ensemble, A et B deux sous-ensembles de E.

a) Déterminer les fonctions caractéristiques de  $\bar{A}$ ;  $A \cap B$ ,  $A \cup B$  en fonction de  $1_A$  et  $1_B$ .

b) En déduire à l'aide de l'indicatrice que :

$$A \cap B = A \cup B \Leftrightarrow A = B$$

**Exercice B2 :** On pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos(x) \end{cases}$$

Déterminer les ensembles suivants :

$$f(\mathbb{R}); f([0; \pi]); f^{-1}(\{0\}); f^{-1}\left(\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}\right); f^{-1}([0; 1]); f(f^{-1}(\{0\})); f(f^{-1}([0; 1])); f^{-1}(f(\{0\}))$$

**Exercice B3 :** Soient E un ensemble, A une partie de E et f une application de E dans F. A-t-on :

$$f^{-1}(\bar{A}) = \overline{f^{-1}(A)}$$

**Exercice B.4** : On pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto z^2 + z \end{cases}$$

On pose l'ensemble :

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C}; \left| z + \frac{1}{2} \right| = 2 \right\}$$

Déterminer  $f(A)$  et  $f^{-1}(\mathbb{R})$

**Exercice B.5** : Déterminer si les applications suivantes sont injectives, surjectives et bijectives :

$$f: \begin{cases} ]0; +\infty[ \rightarrow ]0; +\infty[ \\ x \mapsto x + \frac{1}{x} \end{cases} \quad g: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x; y) \mapsto (x + y; xy) \end{cases} \quad h: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x; y) \mapsto x - y^2 \end{cases}$$

$$f: \begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \\ n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases} \end{cases} \quad g: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x; y) \mapsto (x - y; -2x + 3y) \end{cases} \quad h: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x; y) \mapsto (\max(x; y); \min(x; y)) \end{cases}$$

**Exercice B.6** : On pose les applications suivantes :

$$f: \begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto 2n \end{cases} \quad \text{et } g: \begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases} \end{cases}$$

- Déterminer si  $f$  et  $g$  sont injectives ou surjectives.
- Calculer  $f \circ g$  et  $g \circ f$ . Que pouvez-vous conclure ?

**Exercice B.7** : Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $E$  tel que :  $f \circ f = f$ .

- Montrer que  $f$  est injective si et seulement si  $f$  est surjective.
- Montrer que si  $f$  est injective ou surjective, alors  $f \circ f = Id_E$ .

**Exercice B.8** : Soient  $E$  un ensemble puis  $A$  une partie de  $E$ . Pour tout  $X \in \mathcal{P}(E)$ , on pose :

$$\begin{cases} \varphi_A(X) = X \cap A \\ \psi_A(X) = X \cup A \end{cases}$$

1) Montrer que :

$$\varphi_A \text{ est injective} \Leftrightarrow \varphi_A \text{ est surjective} \Leftrightarrow A = E$$

2) Montrer que :

$$\psi_A \text{ est injective} \Leftrightarrow \psi_A \text{ est surjective} \Leftrightarrow A = \emptyset$$