**Programme de Colle n°4**
**PCSI 2024-2025**
**(7 octobre au 11 octobre)**

## Calcul algébrique

| CONTENUS | CAPACITÉS & COMMENTAIRES |
|---|---|
| **a) Sommes et produits** | |
| Somme et produit d'une famille finie de nombres réels. | Notations $\sum_{i\in I} a_i$, $\sum_{i=1}^{n} a_i$, $\prod_{i\in I} a_i$, $\prod_{i=1}^{n} a_i$. Cas où $I$ est vide. |
| Sommes et produits télescopiques, exemples de changements d'indices et de regroupements de termes. | Dans la pratique, on est libre de présenter les calculs avec des points de suspension. |
| Expressions simplifiées de $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=0}^{n} x^k$.<br>Factorisation de $a^n - b^n$ par $a-b$. | |
| Sommes doubles. Produit de deux sommes finies. | Exemples de sommes triangulaires. |
| Rappels sur la factorielle, les coefficients binomiaux.<br>Formule du binôme dans $\mathbb{R}$. | Convention $\binom{n}{k} = 0$ pour $k<0$ et $k>n$. |

## Nombres complexes

| CONTENUS | CAPACITÉS & COMMENTAIRES |
|---|---|
| **a) Nombres complexes** | |
| Parties réelle et imaginaire.<br>Opérations sur les nombres complexes.<br>Brève extension du calcul de $\sum_{k=0}^{n} x^k$, de la factorisation de $a^n - b^n$, de la formule du binôme. | La construction de $\mathbb{C}$ est hors programme. |
| Point du plan associé à un nombre complexe, affixe d'un point, affixe d'un vecteur. | On identifie $\mathbb{C}$ au plan usuel muni d'un repère orthonormé direct (« plan complexe »). |

**Exercices du V et TD VI (début)**

## Questions de cours

**Chapitre V** :

- **Propriété I.d.3 (Extension d'une identité remarquable) :**

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N} : a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$$

- **Propriété I.e.1** :

$$\forall q \in \mathbb{R}, q \neq 1, \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

- **Proposition V.d.3 (identité de Fermat)** : On a :

$$\forall (n;p) \in \mathbb{N}^2, 0 \leq p \leq n, \binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$$

- **Proposition V.e.1 (binôme de Newton) (*)** : On a :

$$\forall (x;y) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

## Exercices du type

$$\sum_{0\leq i,j\leq n} (i+j) \ , S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}, A = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n \times 2^{n-1}$$

***Application II.c.6*** : Déterminer l´ensemble des nombres complexes tel que :

$$\frac{z-1}{z+2i} \in \mathbb{R} \text{ et } \frac{z-1}{z+2i} \in i\mathbb{R}$$

**Exemple I.b.4** : Soit $A(2;-3)$ et $C(-1;2)$. Déterminer l’image de A par la rotation de centre C et d’angle $\frac{\pi}{2}$ radians.