Correction DM n°1

Exercice : Calcul d'une somme de deux manières différentes

Soit n un entier naturel. Le but de cet exercice est de déterminer de deux manières différentes la somme :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k2^{k-1}$$

Partie A : A l'aide d'une somme double

1) Démontrer que :

$$\forall \text{ n} \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=k}^{n} 2^j = n2^{n+1} + 1$$

2) Démontrer que :

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=k}^{n} 2^j = \sum_{j=0}^{n}(j+1)2^j$$

3) En déduire la valeur de S_n.

Partie B : A l'aide d'une fonction

On pose la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$$

1) Exprimer $f_n(x)$ à l'aide de x et de x^{n+1}

2) On suppose que f_n est dérivable. Déterminer $f_n{}'(x)$.

3) En déduire la valeur de :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k2^{k-1}$$

Partie A : A l'aide d'une somme double

1) On veut calculer :

$$\forall \text{ n} \in \mathbb{N}, \text{T}_n = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=k}^{n} 2^j$$

On sait que :

$$\forall \text{ n} \in \mathbb{N}, \text{T}_n = \sum_{j=k}^{n} 2^j = 2^k + 2^{k+1} + \cdots + 2^n = 2^k\left(1 + 2 + \cdots + 2^{n-k}\right) = 2^k\sum_{j=0}^{n-k} 2^j = 2^k \times \frac{2^{n-k+1} - 1}{2-1}$$

$$\Longrightarrow \forall \text{ n} \in \mathbb{N}, \text{T}_n = 2^{n+1} - 2^k$$

Ainsi on a :

$$\forall \text{ n} \in \mathbb{N}, \text{T}_n = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=k}^{n} 2^j = \sum_{k=0}^{n}\left(2^{n+1} - 2^k\right) = \left(\sum_{k=0}^{n} 2^{n+1}\right) - \left(\sum_{k=0}^{n} 2^k\right) = (n+1)2^{n+1} - \left(2^{n+1} - 1\right)$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{\forall \text{ n} \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=k}^{n} 2^j = n2^{n+1} + 1}$$

2) On peut faire un tableau à double entrée :

k\j	0	1	2	...	n
0	1	2	4	...	2^n
1		2	4	...	2^n
2			4	...	2^n
⋮					⋮
n					2^n

On a donc :

$$\boxed{\forall\, \mathbf{n} \in \mathbb{N}, \mathbf{T}_n = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=k}^{n} 2^j = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{j} 2^j = \sum_{j=0}^{n}(j+1)2^j}$$

3) On sait que :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k2^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)2^k$$

De plus d'après les deux questions précédentes on sait que :

$$\forall\, \mathrm{n} \in \mathbb{N}, \mathrm{T}_n = n2^{n+1} + 1 = \sum_{j=0}^{n}(j+1)2^j$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{S_n = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)2^k = (n-1)2^n + 1}$$

Partie B : A l'aide d'une fonction

1) On sait que :

$$\boxed{\begin{gathered}\forall\, \mathrm{n} \in \mathbb{N}, \forall\, x \in \mathbb{R}, x \neq 1, f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} \\ f_n(1) = n+1\end{gathered}}$$

2) On a :

$$\forall\, \mathrm{n} \in \mathbb{N}, \forall\, x \in \mathbb{R}, x \neq 1, f_n'(x) = \sum_{k=0}^{n} kx^{k-1} = \frac{(n+1)x^n(x-1) - (x^{n+1}-1)}{(x-1)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$$

3) Il suffit de calculer $f_n'(2)$:

$$\boxed{\forall\, \mathrm{n} \in \mathbb{N}, f_n'(2) = \sum_{k=0}^{n} k2^{k-1} = \frac{n2^{n+1} - (n+1)2^n + 1}{(2-1)^2} = 2n2^n - (n+1)2^n + 1 = (n-1)2^n + 1}$$

Problème : Approximation de $\sqrt{2}$

Nous avons vu dans le DS n°1 une façon de trouver une valeur approchée de e, en encadrant e par deux fonctions, l'une croissante, l'autre décroissante, avec les deux qui tendaient vers e. Le but de ce problème est de présenter la méthode de Newton-Raphson, une méthode « efficace » pour trouver numériquement une approximation précise d'un zéro d'une fonction réelle d'une variable réelle. Nous allons appliquer cette méthode pour trouver une valeur approchée de $\sqrt{2}$.

I) Présentation du procédé

a) TVI

On pose la fonction définie sur $[1;3]$ par $\mathrm{f(x)} = \mathrm{x}^2 - 2$:

$$f: \begin{cases} [1;2] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 - 2 \end{cases}$$

1) Etudier les variations de f sur $[1;3]$ et en déduire l'existence d'un unique $\alpha \in [1;2]$ tel que $\mathrm{f}(\alpha) = 0$:

$$\exists!\, \alpha \in [1;2], f(\alpha) = 0$$

On écrit alors $\alpha = \sqrt{2}$, mais si l'on utilise un symbole pour ce nombre, nous ne pouvons qu'en donner une valeur approchée, car, nous le verrons plus tard, il est irrationnel.

b) Le procédé

Début du procédé : On pose $\mathrm{u}_0 = 2$, $\mathrm{A}_0(\mathrm{u}_0; \mathrm{f}(\mathrm{u}_0))$ le point de la courbe d'abscisse u_0 et $(\mathrm{T}_{\mathrm{u}_0})$ la tangente à la courbe de *f* au point d'abscisse $\mathrm{x} = \mathrm{u}_0$.

De plus on pose u_1 l´abscisse de l´intersection entre (T_{u_0})et l´axe des abscisses.
De même on pose $A_1(u_1; f(u_1))$ le point de la courbe d´abscisse u_1 et (T_{u_1}) la tangente à la courbe de f au point d´abscisse $x = u_1$ et u_2 l´abscisse de l´intersection entre (T_{u_1})et l´axe des abscisses. Construire u_2 sur votre figure puis déterminer sa valeur.
On construit ainsi de proche en proche une suite (u_n) intersection de la tangente au point d´abscisse $(T_{u_{n-1}})$ et de l´axe des abscisses :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ (u_{n+1}, 0) = (T_{u_n}) \cap (O_x) \end{cases}$$

2) Tracer sur votre copie $\mathcal{C}_f$ puis (T_{u_0}) et (T_{u_1}).
3) Démontrer que la suite (u_n) est définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right) \end{cases}$$

4) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{2} < u_{n+1} < u_n$. En déduire la convergence de la suite (u_n).

5) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{2})^2$$

6) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^{2^n - 1}}$$

7) Déterminer la limite de la suite (u_n).
8) Combien de termes de la suite faut-il calculer pour avoir une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-100} près.
9) Ecrire un programme Python qui permet d'obtenir une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-n} où n est choisi par l'utilisateur.

1) On pose :

$$f: \begin{cases} [1; 3] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 - 2 \end{cases}$$

f est un polynôme donc f est dérivable et :

$$\forall x \in [1; 3], f'(x) = 2x > 0$$

On a donc le tableau de variation suivant :

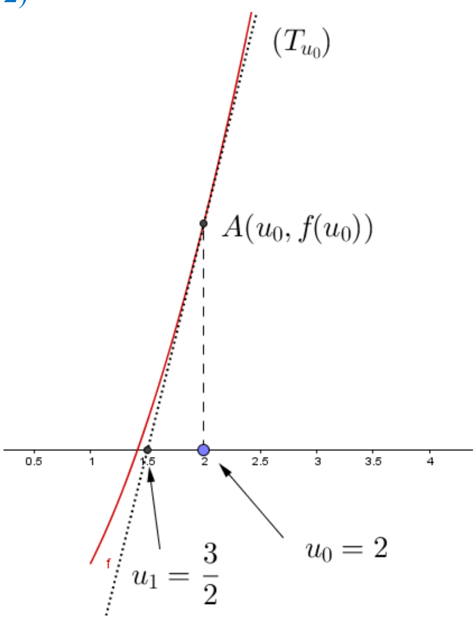
x	1	3
$f'(x)$	$+$	
f	-1 ↗	7

On a donc :

- f est continue sur $[1; 3]$ car c'est un polynôme
- f est strictement monotone sur $[1; 3]$
- f change de signe sur $[1; 3]$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires (ou son corollaire ou le théorème de la bijection…), il existe un unique $\alpha \in [1; 3]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

2)



3) On a de même :

$$(T_{u_n}) : y = f'(u_n)(x - u_n) + f(u_n) = 2u_n(x - u_n) + u_n^2 - 2 = 2u_n x - u_n^2 - 2$$

On en déduit donc que :

$$2u_n x - u_n^2 - 2 = 0 \Rightarrow 2u_n x = u_n^2 + 2 \Longrightarrow x = \frac{u_n^2 + 2}{2u_n} = \frac{1}{2} \times \frac{u_n^2 + 2}{u_n} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) = u_{n+1}$$

On a donc :

$$(u_{n+1}, 0) = (T_{u_n}) \cap (O_x) \Longrightarrow u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$$

4) On étudie la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$ sur $[1; 2]$

f est dérivable sur $[1; 2]$ par somme de fonctions dérivables et :

$$\forall x \in [1; 3], f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2 - 1}{x^2}\right)$$

Or on sait que :

$$\forall x \geq 1, x^2 - 1 \geq 0$$

On en déduit donc que f est croissante sur [1 ;3] :

x	$\sqrt{2}$	2
$g'(x)$	$+$	
g	$\sqrt{2}$ ↗	$\frac{3}{2}$

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{P_n} = \text{"}\sqrt{2} < \mathrm{u_{n+1}} < \mathrm{u_n} \leq 2\text{"}$$

Initialisation : On a :

$$\begin{cases} \mathrm{u_0} = 2 \\ \mathrm{u_1} = \frac{3}{2} \end{cases} \Longrightarrow \sqrt{2} < \mathrm{u_1} < \mathrm{u_0} \leq 2$$

Donc la proposition $\mathrm{P_0}$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier fixé. On suppose vraie $\mathrm{P_n}$: $\sqrt{2} < \mathrm{u_{n+1}} < \mathrm{u_n} \leq 2$

On a alors :

$$\sqrt{2} < u_{n+1} < u_n \leq 2 \Longrightarrow f(\sqrt{2}) < f(u_{n+1}) < f(u_n) \leq \frac{3}{2} \Longrightarrow \sqrt{2} < u_{n+2} < u_{n+1} \leq 2 \Longrightarrow P_{n+1} \text{ est vraie}$$

Conclusion : P_0 est vraie et P_n est héréditaire donc d'après le principe de récurrence, P_n est vraie pour tout entier naturel n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{2} < u_{n+1} < u_n$$

5) On a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) - \sqrt{2} = \frac{1}{2u_n} \times \left(u_n^2 + 2 - 2\sqrt{2}u_n\right) = \frac{1}{2u_n}\left(u_n - \sqrt{2}\right)^2$$

Or on sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq \sqrt{2} > 1 \Longrightarrow \frac{1}{u_n} \leq 1 \Longrightarrow \frac{1}{2u_n} \leq \frac{1}{2} \Longrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right)^2$$

6) On veut montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^{2^n - 1}}$$

On peut le faire par récurrence :

On pose la proposition Q_n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, Q_n = "u_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^{2^n - 1}}"$$

Initialisation : On a

$$\begin{cases} u_0 - \sqrt{2} = 2 - \sqrt{2} < 1 \\ \dfrac{1}{2^{2^0 - 1}} = \dfrac{1}{2^0} = 1 \end{cases} \Longrightarrow u_0 - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^{2^0 - 1}} \Longrightarrow P_0 \text{ est vraie.}$$

Hérédité : Soit n un entier fixé. On suppose vraie Q_n : $u_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^{2^n - 1}}$

On a donc :

$$0 \leq u_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^{2^n - 1}}$$

$$\Longrightarrow \left(u_n - \sqrt{2}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{2^{2^n - 1}}\right)^2 \quad (\text{car } x \mapsto x^2 \text{ est croissante sur } [0; +\infty[)$$

On sait que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right)^2$$

$$\Longrightarrow u_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{2^n - 1}}\right)^2$$

Or on a :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{2^n - 1}}\right)^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{(2^{2^n - 1})^2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{2^n \times 2 - 2}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{2^{n+1} - 2}} = \frac{1}{2^{2^{n+1} - 1}}$$

Donc Q_{n+1} est vraie.

Conclusion : Q_0 est vraie et Q_n est héréditaire donc d'après le principe de récurrence, Q_n est vraie pour tout entier naturel n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^{2^n - 1}}$$

7) On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^{2^n - 1}}$$

Or on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2^{2^n - 1}} = \frac{2}{2^{2^n}}$$

On sait que :

$$\lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty \ (\text{car } 2 > 1) \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} 2^{2^n} = +\infty \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{2^{2^n}} = 0$$

D'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n - \sqrt{2} = 0$$

On a donc :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2}$$

8) On a vu précédemment que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^{2^n-1}}$$

On cherche :

$$0 \leq u_n - \sqrt{2} \leq 10^{-100}$$

On résout :

$$\frac{1}{2^{2^n-1}} \leq 10^{-100}$$

$$\Longrightarrow 2^{2^n-1} \geq 10^{100} \left(\text{car } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ est décroissante sur }]0;+\infty[\right)$$

On peut résoudre cette équation à « tâtons » si l'on ne connait pas la fonction ln ou log.
Sinon on a :

$$2^{2^n-1} \geq 10^{100}$$

$$\Longrightarrow ln\left(2^{2^n-1}\right) \geq ln(10^{100}) \ (\,car\ x \mapsto ln(x)\ est\ croissante\ sur\ ]0;+\infty[\,) \Longrightarrow (2^n - 1)\, ln(2) \geq 100\, ln(10)$$

$$\Longrightarrow 2^n \geq 1 + \frac{100\, ln(10)}{ln(2)} \ (\,car\ ln(2) > 0)$$

$$\Longrightarrow ln(2^n) \geq ln\left(1 + \frac{100\, ln(10)}{ln(2)}\right) \ (\,car\ x \mapsto ln(x)\ est\ croissante\ sur\ ]0;+\infty[\,)$$

$$\Longrightarrow n\, ln(2) \geq ln\left(1 + \frac{100\, ln(10)}{ln(2)}\right) \Longrightarrow n \geq \frac{ln\left(1 + \frac{100\, ln(10)}{ln(2)}\right)}{ln(2)}$$

Or à la calculatrice on obtient :

$$\frac{ln\left(1 + \frac{100\, ln(10)}{ln(2)}\right)}{ln(2)} \approx 8{,}38$$

Il faut donc 9 étapes pour avoir une valeur approchée à 10^{-100} de $\sqrt{2}$.
Ainsi u_9 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-100}.
9)

```
n=input("Quelle valeur de n pour une précision à 10^(-n)")
n=int(n)
u=2
m=0
while (1/2**(2**m-1))>10**(-n):
    u=1/2*(u+2/u)
    m=m+1
print(u)
```