

DM n°2

Exercice 1 : Un peu de complexes

On pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ z \mapsto \frac{\operatorname{Im}(z^5)}{\operatorname{Im}(z)^5} \end{cases}$$

- 1) Déterminer l'image de $1 + i$.
- 2) a) Résoudre l'équation $\sin(\theta) = 0$.
b) En déduire l'ensemble $f^{-1}(\{0\})$.
- c) Montrer que f n'est pas injective.
- 3) On va montrer dans cette question que f n'est pas surjective.
 - a) Rappeler la formule du binôme de Newton.
 - b) On pose $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Montrer qu'il existe un polynôme Q tel que $f(z) = Q\left(\frac{x}{y}\right)$.
 - c) Etudier la fonction suivante sur \mathbb{R} $x \mapsto 5x^4 - 10x^2 + 1$.
 - d) En déduire la valeur de :

$$m = \min_{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}} \frac{\operatorname{Im}(z^5)}{\operatorname{Im}(z)^5} = \min\left(\frac{\operatorname{Im}(z^5)}{\operatorname{Im}(z)^5}, z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\right)$$
- e) Déterminer $f^{-1}(\{m\})$.
- f) Montrer que f n'est pas surjective.

Exercice 2 : Une bijection sur un sous-ensemble de \mathbb{C}

Dans tout cet exercice on pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \{-i\} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto \frac{z - i}{iz - 1} \end{cases}$$

- 1) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ dans un sous-ensemble de \mathbb{C} à déterminer, puis déterminer une expression de $f^{-1}(z)$.
- 2) Déterminer $f^{-1}(\mathbb{R}) = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } f(z) \in \mathbb{R}\}$.
- 3) Démontrer que l'équation $f(z) = z$ admet deux solutions distinctes.
- 4) Dans cette question on souhaite montrer que :

$$f^{-1}(\mathbb{U} \setminus \{-i\}) = \mathbb{R}$$

- a) Montrer que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, 1 - e^{i\theta} = -2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$$

- b) En déduire que :

$$\forall \theta \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right[, f(z) = e^{i\theta} \Leftrightarrow z = \frac{-\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} = -\cotan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

- c) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists! \theta \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right[\text{ tel que } x = \frac{-\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$$

- d) Conclure.

- 5) a) Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Rappeler les solutions de $z^n = 1$.
b) Résoudre l'équation $(f(z))^n = 1$.