Programme de Colle n°6
PCSI 2024-2025
(4 novembre au 8 novembre)

Nombres complexes

L'objectif de cette section, que l'on illustrera par de nombreuses figures, est de donner une solide pratique des nombres complexes, à travers les aspects suivants :

- *l'étude algébrique de l'ensemble $\mathbb{C}$ et la notion d'équation algébrique ;*
- *l'interprétation géométrique des nombres complexes et l'utilisation des nombres complexes en géométrie plane ;*
- *l'exponentielle complexe et ses applications à la trigonométrie.*

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Nombres complexes	
Parties réelle et imaginaire. Opérations sur les nombres complexes. Brève extension du calcul de $\sum_{k=0}^{n} x^k$, de la factorisation de $a^n - b^n$, de la formule du binôme.	La construction de $\mathbb{C}$ est hors programme.
Point du plan associé à un nombre complexe, affixe d'un point, affixe d'un vecteur.	On identifie $\mathbb{C}$ au plan usuel muni d'un repère orthonormé direct (« plan complexe »).
b) Conjugaison et module	
Conjugaison, compatibilité avec les opérations. Module. Relation $\|z\|^2 = z\overline{z}$, module d'un produit, d'un quotient. Inégalité triangulaire, cas d'égalité.	Image du conjugué dans le plan complexe. Interprétation géométrique de $\|z - z'\|$, cercles et disques.
c) Nombres complexes de module 1 et trigonométrie	
Identification du cercle trigonométrique et de l'ensemble des nombres complexes de module 1. Définition de e^{it} pour $t \in \mathbb{R}$. Exponentielle d'une somme.	Notation $\mathbb{U}$.
Formules d'Euler. Technique de l'angle moitié : factorisation de $1 \pm e^{it}$, de $e^{ip} \pm e^{iq}$.	Les étudiants doivent savoir retrouver les formules donnant $\cos(p) \pm \cos(q)$, $\sin(p) \pm \sin(q)$. Linéarisation, calcul de $\sum_{k=0}^{n} \cos(kt)$ et de $\sum_{k=0}^{n} \sin(kt)$.
Formule de Moivre.	Les étudiants doivent savoir retrouver les expressions de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos t$ et $\sin t$.
d) Forme trigonométrique	
Forme trigonométrique $re^{i\theta}$ $(r > 0)$ d'un nombre complexe non nul. Arguments. Arguments d'un produit, d'un quotient. Transformation de $a\cos t + b\sin t$ en $A\cos(t - \varphi)$.	
e) Équations algébriques	
Pour P fonction polynomiale à coefficients complexes admettant a pour racine, factorisation de $P(z)$ par $z - a$.	
Résolution des équations du second degré dans $\mathbb{C}$. Somme et produit des racines.	Calcul des racines carrées d'un nombre complexe donné sous forme algébrique.
f) Racines n-ièmes	
Description des racines n-ièmes de l'unité, d'un nombre complexe non nul donné sous forme trigonométrique.	Notation $\mathbb{U}_n$. Représentation géométrique.

g) Exponentielle complexe

Définition de e^z pour z complexe : $e^z = e^{\mathrm{Re}(z)}e^{\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)}$. Exponentielle d'une somme. Pour tous z et z' dans $\mathbb{C}$, $\exp(z) = \exp(z')$ si et seulement si $z - z' \in 2\mathrm{i}\pi\mathbb{Z}$.	Notations $\exp(z)$, e^z. Module et arguments de e^z.

h) Interprétation géométrique des nombres complexes

Interprétation géométrique des module et arguments de $\dfrac{c-a}{b-a}$.	Traduction de l'alignement, de l'orthogonalité.
Interprétation géométrique des applications $z \mapsto az$ et $z \mapsto z + b$ pour $(a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$. Interprétation géométrique de la conjugaison.	Il s'agit d'introduire certaines transformations du plan : translations, homothéties, rotations. L'étude générale des similitudes est hors programme.

Questions de cours :

Propriété I.d.2 (Inégalité triangulaire avec cas d'égalité à la fin de la démonstration) :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

Propriété I.b.1 : On a :

$$az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow z \in \left\{\frac{-b-\delta}{2a} ; \frac{-b+\delta}{2a}, avec\ \delta^2 = b^2 - 4ac\right\}$$

Propriété I.b.3 (Relation coefficient racine) : Soit $(a; b; c) \in \mathbb{C}^3, a \neq 0$. On a alors :

$$z_1, z_2 \text{ sont les solutions de } az^2 + bz + c = 0 \iff \begin{cases} z_1 z_2 = \dfrac{c}{a} \\ z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a} \end{cases}$$

Exercices du type :

Application II.c.9 : Déterminer l´ensemble des nombres complexes tel que :

$$\frac{z-1}{z+2i} \in \mathbb{R}, i\mathbb{R}$$

Application II.e.6 : Application Linéarisation de $\cos^n(x)$ et $\sin^n(x)$ avec la formule d'Euler ou de Moivre.

Exercice G.5 (chap 6) : On pose l'équation (E) :

$$(E): 2z^3 - (3+4i)z^2 - (4-7i)z + 4 + 2i = 0$$

1) Montrer que (E) admet une solution réel.
2) En déduire toutes les solutions de (E).