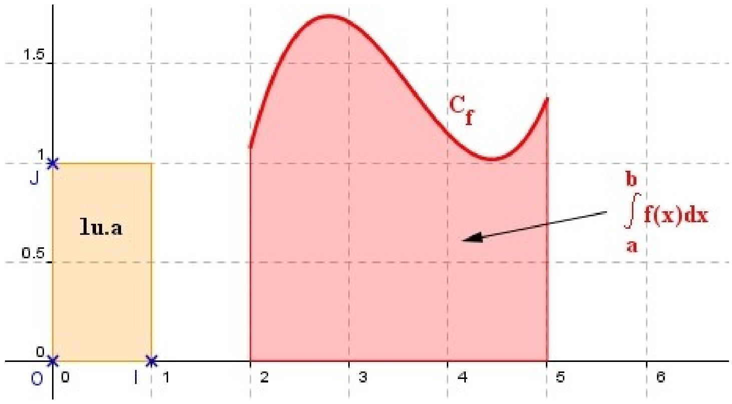
Chapitre 8
Calcul de primitives

Dans tout ce cours $\mathbb{K}$, désigne $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$.

I) Intégrale d'une fonction sur un intervalle [a,b]

a) Intégrale d'une fonction positive



Définition : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ et C_f sa courbe représentative dans un repère (O ;A ;B). L´unité d´aire est l´aire du rectangle OACB où C(1 ;1) dans le repère (O ;A ;B), noté u.a.
L´aire du domaine D, délimité par C_f, l´axe des abscisses et les droites d´équation x = a et x = b est appelé aire sous la courbe C_f pour $x \in [a;b]$. On note : $\int_a^b f(x)dx$
Et se lit : « intégrale de a à b de f(x) dx ».

Exemple I.a.1 : On pose $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$
Déterminer :

$$\int_1^4 f(x)dx$$

Remarque : Le choix de la variable dans la notation de l´intégrale est libre, du moment que cela est cohérent :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$$

Définition : Par convention on a :

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

b) Calcul de l'intégrale

Propriété I.b.1 : Si f est continue et positive sur un intervalle $[a;b]$, la fonction F définie sur $[a;b]$ par

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

est dérivable sur $[a;b]$ et a pour dérivée : $\forall\, x \in [a;b], F'(x) = f(x)$

Exemple I.b.2 : Déterminer la dérivée de :

$$\forall\, x \in [1;4], F(x) = \int_a^x (0.5t + 2)dt$$

II) Définition des primitives d'une fonction continue

a) Généralités

Définition (fonction de classe $\mathcal{C}^k$) : On dit que $f : I \to \mathbb{K}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I si et seulement si :

- f est k fois dérivable sur I $\left(f \in \mathcal{D}^k(I)\right)$
- $f^{(k)}$ est continue sur I

De plus on dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si et seulement si f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I pour tout k entier naturel.
Si f est continue sur I mais pas dérivable sur I on dit que f est de classe $\mathcal{C}^0$ sur I

Remarque : Les fonctions exponentielles, logarithmes, polynômes sont $\mathcal{C}^\infty$ sur leur ensemble de définition.

Exemple II.a.1 : Déterminer une fonction de classe $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ mais pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Définition (Primitive) : Soit *f : I* → $\mathbb{K}$ est de classe $\mathcal{C}^0$ sur I (ie que *f* est continue sur I). On appelle primitive de *f*, noté F, toute fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I dont la dérivée est f :

$$\mathrm{F} \in \mathcal{C}^1(\mathrm{I}, \mathbb{K})$$
$$\mathrm{F}' = f$$

Exemple II.a.2 : Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^3 \end{cases} \qquad g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto cos(x) \end{cases} \qquad h : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{x}{1+x^4} \end{cases} :$$

ATTENTION : Une primitive n'est jamais unique. Seulement à une constante près. On a la propriété suivante :

Propriété II.a.3 : Deux primitives d'une même fonction sur I diffèrent d'une constante.

Exemple II.a.4 : Déterminer toutes les primitives des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{2x}{1+x^2} \end{cases} \qquad g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto cos^5(x)\, sin(x) \end{cases} \qquad h : \begin{cases}]-1;1[\to]-1;1[\\ x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases}$$

Application II.a.5 : On pose :

$$F : \begin{cases} \mathbb{R}^{*+} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto x\, ln(x) - x \end{cases}$$

1) Montrer que F est une primitive de :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^{*+} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto ln(x) \end{cases}$$

2) En déduire l'unique primitive de f telle que *f(1) = 7*.

b) Existence des primitives.

Propriété II.b.1 : Soit *f : I* → $\mathbb{K}$ continue et a ∈ I. On a alors :

- *f* admet des primitives sur I
- *f* admet une unique primitive qui s'annule en a :

$$F : \begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt \end{cases}$$

- Pour toute primitive G de f, on a :

$$\forall\, x \in I, G(x) = G(a) + \int_a^x f(t)dt$$

Application II.b.2 : On pose :

$$\mathrm{f} : \begin{cases}]1;+\infty[\to \mathbb{R} \\ \mathrm{x} \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{x}\ln(\mathrm{x})} \end{cases}$$

Déterminer l'unique primitive de *f* qui s'annule en e^2

Notation de Leibniz : Soit *f : I* → $\mathbb{K}$ continue. Alors une primitive générique de *f* se note :

$$\int^x f(t)dt$$

Elle est donc définie à une constante près. Ce n'est donc pas une fonction !

Exemple II.b.3 : Déterminer :

$$\int^{\mathrm{x}} \mathrm{e}^{\mathrm{u}}\mathrm{du}$$

c) Utilisation des fonctions à valeurs dans ℂ

Définition : Soit f : I → ℂ continue. On a alors :

$$\int_a^x f(t)dt = \int_a^x Re\big(f(t)\big)dt + i\int_a^x Im\big(f(t)\big)dt$$

Exemple II.c.1 : Soit λ un réel non nul. Déterminer :

$$\int^{\mathrm{x}} \mathrm{e}^{\lambda i t}\mathrm{dt}$$

Application II.c.2 : Déterminer une primitive de :

$$g\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto cos(3x)\, e^{5x} \end{cases}$$

Remarque : Pour déterminer une primitive de fonctions de la forme : $x \longmapsto \cos^{p}(x) \sin^{q}(x)$ où p et q sont des entiers naturels il convient mieux de linéariser.

Exemple II.c.3 : Déterminer :

$$\int^{t} \cos^2(\mathrm{x})\,\mathrm{dx}$$

d) Primitives usuelles

(Voir formulaire)

ATTENTION : Soit f : I → ℝ telle que : $\forall x \in I, f(x) \neq 0$.
On a alors :

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = ln(|f(x)|) + C$$

Exemple II.d.1 : Calculer :

$$I = \int_{-3}^{-1} \frac{1}{x}dx$$

e) Lien entre primitive et intégrale

Propriété II.e.1 : Soit *f* une fonction continue et positive sur un intervalle [a; b]. Soit F une primitive de f sur [a; b]. Alors :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Application II.e.2 : On pose :

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto cos^2(x) \end{cases}$$

Déterminer l'aire délimitée par la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation x = 0 et x = 4π

Définition (extension de la définition) : Soit *f* est continue sur un intervalle [a; b], de signe quelconque. Soit F une primitive de *f* sur [a; b]. On définit alors :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Exemple II.e.3 : Déterminer :

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} sin(x)\, dx$$

III) Nouvelles techniques pour déterminer une primitive ou une intégrale

a) Intégration par partie

Propriété III.a.1 : Soit $(f, g) \in \left(\mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{K})\right)^2$. On a alors :

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt$$

Application III.a.2 : Déterminer :

$$\int_0^{\pi} x\, sin(5x)\, dx$$

Remarque : On peut utiliser l'intégration par partie pour calculer des primitives :

Application III.a.3 : Déterminer :

$$\int^t arctan(x)\, dx \;\; et \;\; \int^u ln(t)\, dt$$

b) Changement de variable

Propriété III.b.1 (changement de variable) : Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$. Soient $\varphi \in \mathcal{C}^1([a; b], I)$. Alors :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

On dit que l'on a effectué le changement de variable $x = \varphi(t)$.

Remarque : En pratique on n'utilise pas la formule sous cette forme, mais on décompose le changement de variable en 3 étapes !

A retenir : On cherche à calculer :

$$\int_a^b f(x)dx$$

On pose $x = \varphi(t)$.

1) On trouve de nouvelles bornes en cherchant une solution aux équations :

$$\begin{cases} a = \varphi(t) \\ b = \varphi(t) \end{cases}$$

2) On vérifie que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I à valeur dans [a ;b] et on calcule la valeur du dx

$$dx = \varphi'(t)dt$$

3) On change les valeurs de x par $\varphi(t)$ dans l'intégrale, ainsi que le dx et les bornes.

Application III.b.2 : Déterminer :

$$I = \int_0^1 \sqrt{1 - t^2}\, dt$$

Application III.b.3 **:** Déterminer :

$$I = \int_0^1 \frac{e^{2t}}{1 + e^t} dt$$

Remarque : On peut utiliser le changement de variable pour déterminer une primitive d'une fonction :
Soient $\varphi \in \mathcal{C}^1(J,I)\ et\ f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{K})$. On a alors :

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + C\ avec\ C \in \mathbb{K}$$

Application III.b.4 : Déterminer :

$$\int^x \frac{dt}{ch(t)}$$

Application III.b.5 : Déterminer :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{b^2 - x^2}}$$

IV) Primitives de fractions rationnelles

a) Décomposition en éléments simples

Définition : On appelle fraction rationnelle le quotient de deux fonctions polynômes

Exemple : Les fonctions suivantes sont des fractions rationnelles :

$$x \longmapsto \frac{2x+1}{x+3}\ ;\ x \longmapsto \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x^4 + 5x^2 + 3}$$

Propriété IV.a.1 (Décomposition en éléments simples) : Soient $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]^2$ tel que :

$$\exists (\mathrm{m}_1, \dots \mathrm{m}_\mathrm{n}) \in (\mathbb{N}^*)^\mathrm{n}, \exists (\mathrm{a}_1, \dots, \mathrm{a}_\mathrm{n}) \in \mathbb{N}^\mathrm{n}\ \text{(deux à deux distincts)},$$

$$\mathrm{Q}(\mathrm{x}) = \prod_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} (\mathrm{x} - \mathrm{a}_\mathrm{i})^{\mathrm{m}_\mathrm{i}}$$

Alors il existe $\lambda_{1,1}, \lambda_{1,2}, \dots, \lambda_{1,\mathrm{m}_1}, \lambda_{2,1}, \dots \lambda_{2,\mathrm{m}_2}, \lambda_{3,1}, \dots, \lambda_{\mathrm{n},\mathrm{m}_\mathrm{n}}$ scalaires de $\mathbb{K}$ tels que :

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lambda_{1,1}}{x - a_1} + \frac{\lambda_{1,2}}{(x-a_1)^2} + \dots + \frac{\lambda_{1,m_1}}{(x-a_1)^{m_1}} + \dots + \frac{\lambda_{n,1}}{x - a_n} + \dots + \frac{\lambda_{n,m_n}}{(x-a_n)^{m_n}}$$

Exemple IV.a.2 : Décomposer en élément simple les fractions rationnelles suivantes :

$$f : x \longmapsto \frac{1}{1-x^2}\ ;\ g\ :\ x \longmapsto \frac{2x+1}{x(1+x)^2}$$

Remarque : Si le degré de P est supérieur au degré de Q, il faut transformer la fraction rationnelle, nous verrons cela dans le cours sur les polynômes

Application IV.a.3 : Calculer :

$$\int_1^3 \frac{dt}{t(t+1)(t+2)}$$

Application IV.a.4 **:** Déterminer une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction g suivante :

$$g\ :\ x \longmapsto \frac{2x+1}{x(1+x)^2}$$

Remarque : On peut utiliser des complexes pour factoriser un polynôme sur $\mathbb{R}$.

Exemple IV.a.5 : Factoriser : $P(t) = 1 + t^4$

b) Cas des fonctions de degré 2

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, a \neq 0$. On pose dans cette partie :

$$f : x \longmapsto \frac{dx + e}{ax^2 + bx + c}$$

Propriété IV.b.1 : En fonction de la valeur du discriminant, un polynôme de degré 2 peut se factoriser ou non sur les réels. On a donc 3 cas.

- $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. On a deux racines distinctes x_1 et x_2 réelles :

$$f : x \longmapsto \frac{dx + e}{a(x - x_1)(x - x_2)}$$

On décompose alors en éléments simples.

- $\Delta = b^2 - 4ac = 0$. On a alors une racine double :

$$\int \frac{dx + e}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{dx + e}{(x - x_1)^2} dx = \frac{d'}{x - x_1} + C$$

- $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Il n'y a pas de racine réelle. On se ramène à une forme canonique

$$\int \frac{\mathrm{dx} + \mathrm{e}}{\mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + \mathrm{c}} \mathrm{dx} = \int \frac{\mathrm{dx} + \mathrm{e}}{\mathrm{a}\left(\mathrm{x} - \frac{\mathrm{b}}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2}} \mathrm{dx}$$

Application IV.b.2 : Déterminer :

$$F_1(x) = \int \frac{x + 1}{x^2 - 5x + 6} dx \quad F_2(x) = \int \frac{x + 3}{x^2 + 4x + 4} dx \ ; F_3(x) = \int \frac{x - 3}{x^2 + x + 1} dx$$

Application IV.b.3 : Déterminer une primitive de :

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x^3 - 1}$$

Application IV.b.4 : Déterminer :

$$I = \int_{-3}^{3} \frac{1}{1 + \mathrm{t}^4} \mathrm{dt}$$