Fiche TD 8 : Calcul de primitives

Partie A : Calculs classiques de primitives et intégrale

Exercice A.1 : Déterminer les primitives des fonctions suivantes en précisant leur domaine de validité

$$f_1 : x \longmapsto x^3 + 5x^2 - 3x + 1;\ \ f_2 : x \longmapsto \cos(3x)\quad ; f_3(x) = e^{-5x}\ ; f_4(x) = \frac{1}{x+2};\ f_5 : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$f_6 : x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}\ f_7 : x \longmapsto \frac{1}{x^4};\ \ f_8 : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}}\quad ; f_9(x) = \sqrt{x}\ ; f_{10}(x) = x\sqrt{x};$$

Exercice A.2 : Déterminer les primitives des fonctions suivantes en précisant leur domaine de validité

$$f_1 : x \longmapsto \frac{x}{1+x^2};\ \ f_2 : x \longmapsto \frac{x}{1+x^4}\quad ; f_3(x) = \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\ ; f_4(x) = \frac{1}{x\ln(x)};\ f_5 : x \longmapsto \cos^4(x)\,;$$

$$f_6 : x \longmapsto \cos(x)\sin^4(x)\qquad f_7 : x \longmapsto \cos^3(x)\sin^4(x)\qquad f_8 : x \longmapsto \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}$$

Exercice A.3 : Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x}dx,\ \ I_2 = \int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^3}dx$$

Exercice A.4 : On cherche à calculer de deux façons différentes l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^1 e^{-2x}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx$$

1) a) On pose la fonction :

$$g_{a,b} : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \left(a\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + b\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)e^{-2x} \end{cases}$$

Déterminer les valeurs de a et b pour que $g_{a,b}$ soit une primitive de $x \longmapsto e^{-2x}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

b) En déduire la valeur de I.

2) En utilisant les complexes, déterminer une primitive de $x \longmapsto e^{-2x}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ puis retrouvez I.

Partie B : Changement de variable et intégration par partie

Exercice B.1 : Déterminer les primitives des fonctions suivantes en précisant leur domaine de validité

$$f_1 : x \longmapsto xe^{3x};\ \ f_2 : x \longmapsto (x+3)\cos(3x)\quad ; f_3(x) = \arcsin(x)\ \ ; f_4(x) = x\arctan(x)\,;\ f_5 : x \longmapsto x^2\cos(x)\,;$$

Exercice B.2 : A l'aide d'un changement de variable, déterminer une primitive des fonctions suivantes et préciser le domaine de validité :

$$1.\ f_1 : x \mapsto \frac{x^7}{(x^4+1)^2}\quad 2.\ f_2 : x \mapsto \frac{1}{\mathrm{ch}(x)}\quad 3.\ f_3 : x \mapsto \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\quad 4.\ f_4 : x \mapsto e^{\sqrt{x}}$$

$$5.\ f_5 : x \mapsto \frac{1}{e^x(1+e^x)}\quad 6.\ f_6 : x \mapsto \frac{3}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\quad 7.\ f_7 : x \mapsto \frac{1}{\tan(x)+1}$$

Exercice B.3 : Déterminer les valeurs des primitives suivantes :

$$1) \int^x t\ln(t^2+1)dt\,; 2) \int^x (t^2-t+3)e^{2t}dt\,, 3) \int^x \ln(1+t^2)dt$$

$$4) \int^x t\sin^3(t)dt\,, 5) \int^x \sqrt{16t^2+9}\,dt\ \ 6) \int^x \mathrm{sh}(t)\sin(t)$$

Exercice B.4 : Calculer :

1) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\arcsin(t)}{1-t^2}}\,dt$ 2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(t)\sin^4(t)\,dt$ 3) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (t^2+t+1)e^{-t}dt$

4) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (t^3-1)\mathrm{ch}(t)dt$ 5) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dt}{2t^2+2t+1}$ 6) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dt}{e^t+1}$

Exercice B.5 : En posant $x = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$, calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{2+\cos(t)}$ 2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{2-\sin(t)}$ 3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\sin(t)-\cos(t)+\sqrt{2}}$

Partie C : Primitives et intégrales des fonctions rationnelles

Exercice C.1 : Déterminer les primitives des fonctions suivantes en précisant leur domaine de validité

$f_1 : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+x-6}$; $f_2 : x \longmapsto \dfrac{x+3}{x^2+x-6}$; ; $f_3(x) = \dfrac{1}{x^2+2x+3}$; $f_4(x) = \dfrac{2x^2+x-9}{x^2+2x+3}$; $f_5 : x \longmapsto \dfrac{7x+1}{x^2-6x+9}$;

Exercice C.2 : Calculer :

$$I_1 = \int_0^2 \frac{1}{x^3+1}\,dx$$

Exercice C.3 : On cherche à calculer :

$$I_1 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin(t)+\tan(t)}\,dt$$

1) En effectuant le changement de variable $u = \cos(t)$, montrer que l'on peut écrire :

$$I = \int_\alpha^\beta R(u)du \text{ avec R une fraction rationnelle.}$$

2) En déduire la valeur de l'intégrale I.

Partie D : Suites d'intégrale

Exercice D.1 : On pose :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, I_n = \int_1^e (\ln(x))^n\,dx$$

1) Montrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^1 t^n e^t dt$$

2) Donner une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n

3) En déduire que la suite $(I_n)_n$ converge et déterminer sa limite.

Exercice D.2 : On pose :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin(x)\,dx$$

1) Etablir une formule de récurrence entre I_{n+1} et I_n.

2) En déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}, I_{2p}$ et I_{2p+1} sous forme de somme.