Correction TD 7 : Vocabulaire ensembliste

Partie A : Ensemble

Exercice A.1 : Démontrer que :

$$A = B \Leftrightarrow A \cup B = A \cap B$$

C'est une équivalence. On peut raisonner dans les deux cas.

1er cas : $\Longrightarrow$

Si $A = B$ alors $A \cup B = A = A \cap B$. C'est trivial !

2ième cas : $\Longleftarrow$

Si $A \cup B = A \cap B$. Soit $x \in A$. On a alors : $x \in A \cup B$ donc $x \in A \cap B$ donc $x \in B$. Donc $A \subset B$.
De même on a : $x \in B \Longrightarrow x \in A \cup B \Longrightarrow x \in A \cap B \Longrightarrow x \in A$. Donc $B \subset A$
Ainsi $A = B$.

Exercice A.2 : Démontrer que :

$$A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A \subset C$$

Là encore c'est une équivalence.
1er cas : $\Longrightarrow$
On suppose que $A \cup B = A \cap C$.
On a alors :

$$x \in B \Longrightarrow x \in A \cup B \Longrightarrow x \in A \cap C \Longrightarrow x \in A$$

On en déduit donc que $B \subset A$.
De même :

$$x \in A \Longrightarrow x \in A \cup B \Longrightarrow x \in A \cap C \Longrightarrow x \in C$$

On en déduit donc que $A \subset C$.
On a donc :

$$A \cup B = A \cap C \Longrightarrow B \subset A \subset C$$

2ième cas : $\Longleftarrow$
On suppose que $B \subset A \subset C$.
On a alors :

$$x \in A \cup B \Longrightarrow x \in A \Longrightarrow x \in A \cap C$$

On en déduit donc que $A \cup B \subset A \cap C$.
De même on a :

$$x \in A \cap C \Longrightarrow x \in A \Longrightarrow x \in A \cup B$$

On en déduit donc que $A \cap C \subset A \cup B$
On a donc bien $A \cap C = A \cup B$.

Exercice A.3 : Soient A,B et C trois ensembles. Démontrer que :

$$\begin{cases} A \cup B \subset A \cup C \\ A \cap B \subset A \cap C \end{cases} \Longrightarrow B \subset C$$

Soit $x \in B$. On a alors :

$$x \in B \Longrightarrow x \in A \cup B \Longrightarrow x \in A \cup C$$

On en déduit donc que :

$$x \in B \Longrightarrow \begin{cases} x \in A \\ \text{ou} \\ x \in C \end{cases}$$

Si $x \in A$ alors $x \in A \cap B$ donc $x \in A \cap C$ donc $x \in C$.
On en déduit donc que :

$$x \in B \Longrightarrow x \in C$$

On en déduit donc que :

$$\begin{cases} A \cup B \subset A \cup C \\ A \cap B \subset A \cap C \end{cases} \Rightarrow B \subset C$$

Exercice A.4 : Enumérer : $\mathcal{P}(\{1\,;2\,;3\,;4\})$

Il y a 16 sous-ensemble de {1 ;2 ;3 ;4}

Le sous –ensemble vide $\left(\binom{4}{0} = 1\right)$: $\emptyset$

Les singletons (ceux qui sont seuls) $\left(\binom{4}{1} = 4\right)$: $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$

Les couples (ceux qui sont deux) $\left(\binom{4}{2} = 6\right)$: $\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}$

Les 3-uplets (ceux qui sont trois) $\left(\binom{4}{3} = \binom{4}{1} = 1\right)$: $\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}$

L'ensemble lui-même $\left(\binom{4}{4} = 1\right)$: $\{1,2,3,4\}$

On a alors :

$$\mathcal{P}(\{1,2,3,4\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$$

Exercice A.5 : Soient E et F deux ensembles. Déterminer une relation entre :
a) $\mathcal{P}(E \cup F)$ et $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$
b) $\mathcal{P}(E \cap F)$ et $\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$
c) $\mathcal{P}(E \times F)$ et $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$

a) On a une inclusion : $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) \subset \mathcal{P}(E \cup F)$
On effet si on pose $E = \{1,2\}$ et $F = \{3\}$ on a alors :

$$\mathcal{P}(E \cup F) = \mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

Alors que :

$$\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\} \text{ et } \mathcal{P}(\{3\}) = \{\emptyset, \{3\}\}$$

On en déduit donc que :

$$\mathcal{P}(\{1,2\}) \cup \mathcal{P}(\{3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{3\}\} \subsetneq \mathcal{P}(\{1,2,3\})$$

b) On un ici une égalité : $\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F) = \mathcal{P}(E \cap F)$.
On peut raisonner par équivalence !

$$A \in \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F) \Leftrightarrow \begin{cases} A \in \mathcal{P}(E) \\ A \in \mathcal{P}(F) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \subset E \\ A \subset F \end{cases} \Leftrightarrow A \subset E \cap F \Leftrightarrow A \in \mathcal{P}(E \cap F)$$

On a donc bien $\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F) = \mathcal{P}(E \cap F)$.

c) Là encore on a une égalité !

$$A \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F) \Leftrightarrow A = (A_1, A_2), \begin{cases} A_1 \in \mathcal{P}(E) \\ A_2 \in \mathcal{P}(F) \end{cases} \Leftrightarrow A = (A_1, A_2), \begin{cases} A_1 \subset E \\ A_2 \subset F \end{cases} \Leftrightarrow A \subset E \times F \Leftrightarrow A \in \mathcal{P}(E \times F)$$

On a donc bien $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F) = \mathcal{P}(E \times F)$.

Exercice A.6 : Soit A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E. Montrer que :

$$A \subset B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$$

C'est une équivalence.

1er cas : $\Rightarrow$

On suppose que $A \subset B$. Soit $C \in \mathcal{P}(A)$. On a alors $C \subset A$ donc $C \subset B$ donc $C \in \mathcal{P}(B)$.
On a donc $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$.

2ième cas : $\Leftarrow$

On suppose que $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$. On sait que $A \in \mathcal{P}(A)$ donc $A \in \mathcal{P}(B)$ donc $A \subset B$.

On a donc :

$$A \subset B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$$

Exercice A.7 : Montrer que :
a) $(A\backslash B)\backslash C = A\backslash(B \cup C)$
b) $(A\backslash B) \cap (C\backslash D) = (A \cap C)\backslash(B \cup D)$

a) C'est une égalité d'ensemble. On peut ici raisonner par équivalence :
On a :

$$x \in (A\backslash B)\backslash C \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A\backslash B \\ x \notin C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin C \\ x \notin B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \cup C \end{cases} \Leftrightarrow x \in (A)\backslash(B \cup C)$$

On en déduit donc que :

$$(A\backslash B)\backslash C = A\backslash(B \cup C)$$

b) On a :

$$x \in (A\backslash B) \cap (C\backslash D) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A\backslash B \\ x \in C\backslash D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \\ x \in C \\ x \notin D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \cap C \\ x \notin B \cup D \end{cases} \Leftrightarrow x \in (A \cap C)\backslash(B \cup D)$$

On en déduit donc que :

$$(A\backslash B) \cap (C\backslash D) = (A \cap C)\backslash(B \cup D)$$

Exercice A.8 : Soient $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_i)_{i\in I}$ deux familles de sous ensembles de E tel que :

$$\forall\, i \in I, E = A_i \cup B_i$$

Montrer que :

$$E = \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \bigcup \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right)$$

Ici on peut raisonner par double inclusion.

<u>**1^{er} cas : Montrons que :**</u>

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \bigcup \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) \subset E$$

On sait que :

$$\forall i \in I, (A_i, B_i) \in \mathcal{P}(E)^2$$

On en déduit donc que :

$$\bigcup_{i\in I} A_i \subset E \text{ et } \bigcap_{i\in I} B_i \subset E$$

On a donc :

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \bigcup \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) \subset E$$

<u>**$2^{ième}$ cas : Montrons que :**</u>

$$E \subset \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \bigcup \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right)$$

Soit $x \in E$. On en déduit donc que :

$$\forall i \in I, x \in A_i \cup B_i$$

1^{er} cas : Il existe $i_0 \in I$ tel que $x \in A_{i_0}$

On en déduit alors que :

$$\exists i_0 \in I, x \in A_{i_0} \Rightarrow x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \Rightarrow x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \bigcup \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right)$$

$2^{\text{ième}}$ cas : $\forall i \in I, x \notin A_i$

On sait que $\forall i \in I, x \in A_i \cap B_i$. On en déduit donc que $\forall i \in I, x \in B_i$. Donc $x \in \bigcap_{i\in I} B_i$. On a donc les implications suivantes :

$$\forall i \in I, x \notin A_i \Longrightarrow \forall i \in I, x \in B_i \Longrightarrow x \in \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) \Longrightarrow x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \bigcup \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right)$$

On en déduit donc que :

$$E = \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \bigcup \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right)$$

Partie B : Applications

Exercice B.1 : Soit E un ensemble, A et B deux sous-ensembles de E.
a) Déterminer les fonctions caractéristiques de $\overline{A}$; $A \cap B, A \cup B$ en fonction de 1_A et 1_B.
b) En déduire à l'aide de l'indicatrice que :

$$A \cap B = A \cup B \Leftrightarrow A = B$$

a) On a :

$$1_{\overline{A}}(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \overline{A} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} = \begin{cases} 1 \text{ si } x \notin A \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} = \begin{cases} 1-0 \text{ si } x \notin A \\ 1-1 \text{ si } x \in A \end{cases} = 1 - 1_A(x)$$

On en déduit donc que :

$$1_{\overline{A}} = 1 - 1_A$$

De même on a :

$$1_{A\cap B}(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \cap B \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \text{ et } x \in B \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} = 1_A(x) \times 1_B(x)$$

On en déduit donc que :

$$1_{A\cap B} = 1_A \times 1_B$$

Enfin on a :

$$1_{A\cup B}(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \cup B \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 1 \text{ si } x \in B \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} = 1_A(x) + 1_B(x) - 1_A(x) \times 1_B(x)$$

On en déduit donc que :

$$1_{A\cup B} = 1_A + 1_B - 1_A \times 1_B = 1_A + 1_B - 1_{A\cap B}$$

b) On a :

$$A \cap B = A \cup B \Leftrightarrow 1_A \times 1_B = 1_A + 1_B - 1_A \times 1_B$$
$$\Leftrightarrow 21_A \times 1_B = 1_A + 1_B$$

1^{er} cas : Si $1_A(x) = 1 \Longrightarrow 1_B(x) = 1$
$2^{\text{ième}}$ cas : Si $1_A(x) = 0 \Longrightarrow 1_B(x) = 0$

On en déduit donc que :

$$21_A \times 1_B = 1_A + 1_B \Leftrightarrow 1_A = 1_B$$

On en déduit donc que :

$$A \cap B = A \cup B \Leftrightarrow A = B$$

Exercice B2 : On pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \cos(x) \end{cases}$$

Déterminer les ensembles suivants :

$$f(\mathbb{R}); f([0;\pi]) \,; f^{-1}(\{0\}); f^{-1}\left(\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}\right); f^{-1}([0;1]) \,; f\left(f^{-1}(\{0\})\right); f\left(f^{-1}([0;1])\right);\ f^{-1}\left(f(\{0\})\right)$$

On a :

$$f(\mathbb{R}) = f([0;\pi]) = [-1;1]$$

$$f^{-1}(\{0\})=\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$$

$$f^{-1}\left(\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}\right)=\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{6}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{6}+2k\pi\right\}$$

$$f^{-1}([0;1])=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi;\frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$$

$$f\left(f^{-1}(\{0\})\right)=f\left(\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}\right)=\{0\}$$

$$f\left(f^{-1}([0;1])\right)=f\left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi;\frac{\pi}{2}+2k\pi\right]\right)=[0;1]$$

$$f^{-1}\left(f(\{0\})\right)=f^{-1}(\{1\})=\{2k\pi;k\in\mathbb{Z}\}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{2k\pi\}$$

Exercice B3 : Soient E un ensemble, A une partie de F et f une application de E dans F. A-t-on :

$$f^{-1}(\bar{A})=\overline{f^{-1}(A)}$$

On raisonne par équivalence :

$$x\in f^{-1}(\bar{A})\Leftrightarrow f(x)\in\bar{A}\Leftrightarrow f(x)\notin A\Leftrightarrow x\notin f^{-1}(A)\Leftrightarrow x\in\overline{f^{-1}(A)}$$

Exercice B.4 : On pose :

$$f:\begin{cases}\mathbb{C}\to\mathbb{C}\\ z\longmapsto z^2+z\end{cases}$$

On pose l'ensemble :

$$A=\left\{z\in\mathbb{C};\left|z+\frac{1}{2}\right|=2\right\}$$

Déterminer $f(A)$ et $f^{-1}(\mathbb{R})$

On sait que :

$$z\in A\Leftrightarrow\left|z+\frac{1}{2}\right|=2\Leftrightarrow\exists\theta\in\mathbb{R},z+\frac{1}{2}=2e^{i\theta}\Leftrightarrow\exists\theta\in\mathbb{R},z=2e^{i\theta}-\frac{1}{2}$$

On a alors :

$$f(z)=z^2+z=\left(2e^{i\theta}-\frac{1}{2}\right)^2+2e^{i\theta}-\frac{1}{2}=4e^{2i\theta}-2e^{i\theta}+\frac{1}{4}+2e^{i\theta}-\frac{1}{2}=4e^{i\theta}-\frac{1}{4}$$

On en déduit donc que :

$$z\in A\Leftrightarrow\exists\theta\in\mathbb{R},f(z)+\frac{1}{4}=4e^{i\theta}\Leftrightarrow\left|f(z)+\frac{1}{4}\right|=4$$

On en déduit donc que :

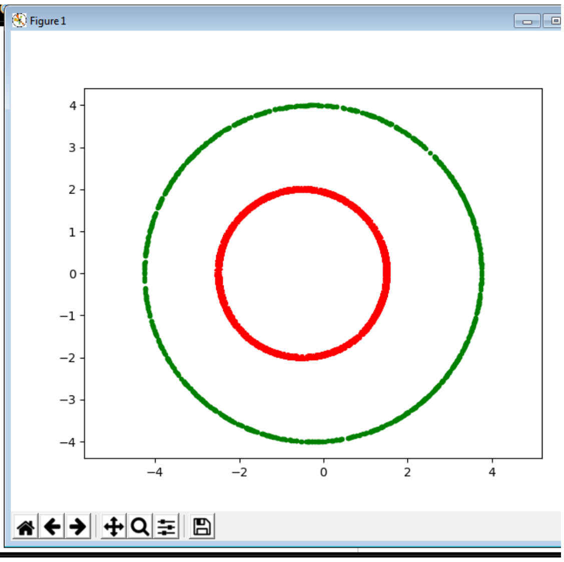
$$f\left(\left\{z\in\mathbb{C};\left|z+\frac{1}{2}\right|=2\right\}\right)=\left\{z\in\mathbb{C};\left|z+\frac{1}{4}\right|=4\right\}$$

Remarque : On peut alors traduire cela par le fait que l'image du cercle de centre I $\left(-\frac{1}{2},0\right)$ et de rayon 2 est le cercle de centre I′ $\left(-\frac{1}{4},0\right)$ et de rayon 4.

On peut faire un programme python pour illustrer cela :

```python
def f(x,y):
    return(x**2-y**2+x,y+2*x*y)

def courbe(n):
    import random as r
    import math as m
    abscisse=[]
    ordonnee=[]
    ai=[]
    oi=[]
    for i in range(n):
        theta=6.28*r.random()
        abscisse.append(2*m.cos(theta)-0.5)
        ordonnee.append(2*m.sin(theta))
        ai.append(f(abscisse[i],ordonnee[i])[0])
        oi.append(f(abscisse[i],ordonnee[i])[1])
    import matplotlib.pyplot as plt
    plt.plot(abscisse,ordonnee,"*r")
    plt.plot(ai,oi,'.g')
    plt.axis('equal')
    plt.show()
```



De même on sait que :

$$f^{-1}(\mathbb{R})=\{z\in\mathbb{C}, f(z)=z^2+z\in\mathbb{R}\}$$

On sait que de plus que :

$$z^2+z=\left(\mathcal{R}e(z)^2-\mathcal{I}m(z)^2+\mathcal{R}e(z)\right)+2i\left(\mathcal{R}e(z)\mathcal{I}m(z)+\mathcal{I}m(z)\right)$$

On en déduit donc que :

$$z^2+z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \mathcal{R}e(z)\mathcal{I}m(z)+\mathcal{I}m(z)=0\Leftrightarrow\begin{cases}\mathcal{I}m(z)=0\\ \quad\text{ou}\\ \mathcal{R}e(z)=-1\end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$f^{-1}(\mathbb{R})=\{z=x \text{ ou } z=-1+iy,(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$$

Remarque : On peut alors traduire cela par le fait que l'image d'un complexe z par f est réel si et seulement si le point d'affixe z est soit sur la droite des abscisses, soit sur la droite d'équation $x=-1$.

Exercice B.5 : Déterminer si les applications suivantes sont injectives, surjectives et bijectives :

$$f:\begin{cases}]0;+\infty[\to[0;+\infty[\\ x\longmapsto x+\dfrac{1}{x}\end{cases}\qquad g:\begin{cases}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\\ (x;y)\longmapsto(x+y;xy)\end{cases}\qquad h:\begin{cases}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\\ (x;y)\longmapsto x-y^2\end{cases}$$

$$f:\begin{cases}\mathbb{N}\to\mathbb{Z}\\ n\longmapsto\begin{cases}\dfrac{n}{2}\text{ si } n \text{ pair}\\ -\dfrac{n+1}{2}\text{ si } n \text{ impair}\end{cases}\end{cases}\qquad g:\begin{cases}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\\ (x;y)\longmapsto(x-y;-2x+3y)\end{cases}\qquad h:\begin{cases}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\\ (x;y)\longmapsto(\max(x;y);\min(x;y))\end{cases}$$

$$f:\begin{cases}]0;+\infty[\to[0;+\infty[\\ x\longmapsto x+\dfrac{1}{x}\end{cases}$$

Cette fonction n'est ni injective ni surjective. On peut le montrer de plusieurs façons.

Méthode 1 : Avec des ensembles

1^er cas : f n'est pas injective

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+2=2+\frac{1}{2}=f(2)$$

Donc f n'est pas injective.

2^ième cas : f n'est pas surjective

$$f(x)=0\Longrightarrow x+\frac{1}{x}=0\Longrightarrow\frac{x^2+1}{x}=0\Longrightarrow x\in\emptyset$$

On en déduit donc que 0 n'est l'image de personne par la fonction f.

Méthode 2 : Par une étude de fonctions

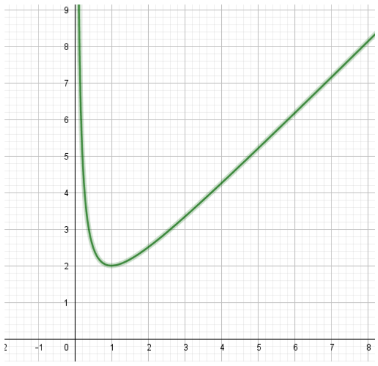
On sait que f estr dérivable sur $]0;+\infty[$ et :

$$\forall x>0, f'(x)=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$$

On a alors :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	2	$\nearrow$	

On peut alors remarquer que tous les nombres de l'intervalle $[0;2[$ ne sont pas atteint, donc f n'est pas surjective.
De plus on peut voir f n'est pas monotone et comme elle est continue, elle ne sera pas injective.



$$g:\begin{cases}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\\(x;y)\longmapsto(x+y;xy)\end{cases}$$

1er cas : g n'est pas injective

En effet on a :

$$g\big((1{,}0)\big)=(1{,}0)=g\big((0{,}1)\big)$$

Donc g n'est pas injective.

2ième cas : g n'est pas surjective

En effet on résout :

$$g\big((x,y)\big)=(1{,}3)\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=1\\xy=3\end{cases}\Leftrightarrow \text{x et y sont racines réelles de } z^2-1z+3=0$$

Or on a $\Delta=1-36=-35<0$. Donc $z^2-1z+3=0$ n'admet pas de racine réelle. Donc $(1{,}3)$ n'est par atteint par g. Donc g n'est pas injective.

Remarque : On sait d'après le cours précédent sur les nombres complexes, partie C, que :

Propriété I.b.3 (Relation coefficient racine) : Soit $(a;b;c)\in\mathbb{C}^3, a\neq 0$. On a alors :

$$z_1,z_2 \text{ sont les solutions de } az^2+bz+c=0 \Leftrightarrow \begin{cases}z_1z_2=\dfrac{c}{a}\\ z_1+z_2=-\dfrac{b}{a}\end{cases}$$

On cherche à savoir si g est surjective ou non. On pose $(x',y')\in\mathbb{R}^2$.
On cherche à résoudre $g\big((x,y)\big)=(x',y')$. On a :

$$g\big((x,y)\big)=(x',y')\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=x'\\xy=y'\end{cases}\Leftrightarrow \text{x et y sont racines réelles de } z^2-x'z+y'=0$$

On a $\Delta=x'^2-4y'$.
On en déduit donc que :

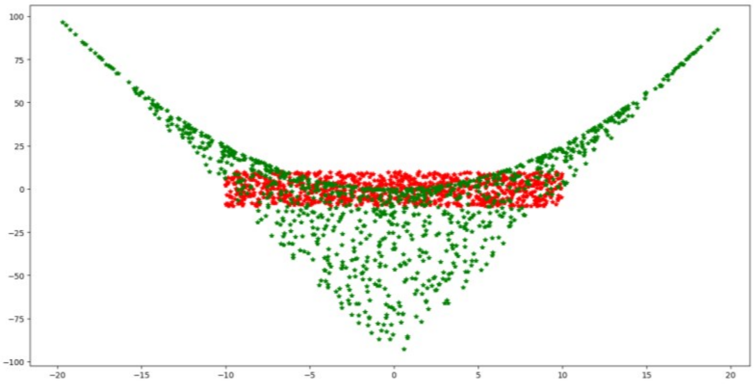
$$g(\mathbb{R}^2)=\{(x',y')\in\mathbb{R}^2, x'^2\geq 4y'\}$$

Cela est beaucoup plus précis qu'un simple contre-exemple. Mais cela nous permet aussi facilement de découvrir un contre-exemple ! On peut faire un programme Python qui illustre cela !
On en déduit aussi que l'aquation $g\big((x,y)\big)=(a,b)$ n'admet aucune solution si $a^2<4b$, admet une unique solution si $a^2=4b$ et deux solutions si $a^2>4b$.

On a le programme suivant :

```python
def f(x,y):
    return(x+y,x*y)

def courbe(n):
    import random as r
    abscisse=[]
    ordonnee=[]
    ai=[]
    oi=[]
    for i in range(n):
        abscisse.append(20*r.random()-10)
        ordonnee.append(20*r.random()-10)
        ai.append(f(abscisse[i],ordonnee[i])[0])
        oi.append(f(abscisse[i],ordonnee[i])[1])
    import matplotlib.pyplot as plt
    plt.plot(abscisse,ordonnee,"*r")
    plt.plot(ai,oi,'*g')
    plt.show()
```



L'image est obtenu avec courbe(1000).

$$h:\begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x;y) \longmapsto x - y^2 \end{cases}$$

1^er cas : h n'est pas injective

En effet on a :

$$h\big((0,1)\big) = -1 = h\big((0,-1)\big)$$

Donc h n'est pas injective.

2^ième cas : h est surjective

On a :

$$\forall c \in \mathbb{R}, h\big((c,0)\big) = c$$

Donc h est surjective !

$$f:\begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \\ n \longmapsto \begin{cases} \dfrac{n}{2} \text{ si n pair} \\ -\dfrac{n+1}{2} \text{ si n impair} \end{cases} \end{cases}$$

1^er cas : f est injective

En effet on a :

$$f(n) = f(n') \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{n}{2} = \dfrac{n'}{2} \\ \text{ou} \\ -\dfrac{n+1}{2} = \dfrac{n'}{2} \\ \text{ou} \\ -\dfrac{n'+1}{2} = \dfrac{n}{2} \\ \text{ou} \\ -\dfrac{n+1}{2} = -\dfrac{n'+1}{2} \end{cases} \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{\text{pour une raison} \\ \text{de signe}}} \begin{cases} \dfrac{n}{2} = \dfrac{n'}{2} \\ \text{ou} \\ -\dfrac{n+1}{2} = -\dfrac{n'+1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow n = n'$$

Donc f est injective.

2^ième cas : h est surjective

Soit $k \in \mathbb{Z}$.

- Si $k \geq 0$ on a alors $k = f(2k)$
- Si $k < 0$ on a alors : $k = f(-2k-1)$

On en déduit donc que :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \exists n \in \mathbb{N}, f(n) = k$$

Donc f est surjective.
Donc f est bijective.

$$g:\begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x;y) \longmapsto (x-y;-2x+3y) \end{cases}$$

On va montrer que g est bjective enrésolvant $g\big((x,y)\big) = (x',y')$.
On résout :

$$\begin{cases} x-y=x' \\ -2x+3y=y' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y'+3x' \\ y=y'+2x' \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$\forall (x',y') \in \mathbb{R}^2, \exists!\,(x,y) \in \mathbb{R}^2, g\big((x,y)\big) = (x',y')$$

On en déduit donc que g est bijective et :

$$g^{-1}:\begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x;y) \longmapsto (3x+y;2x+y) \end{cases}$$

$$h:\begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x;y) \longmapsto (\max(x;y)\,;\min(x;y)) \end{cases}$$

1er cas : h n’est pas injective

En effet on a :

$$h\big((0,1)\big) = (1,0) = h\big((1,0)\big)$$

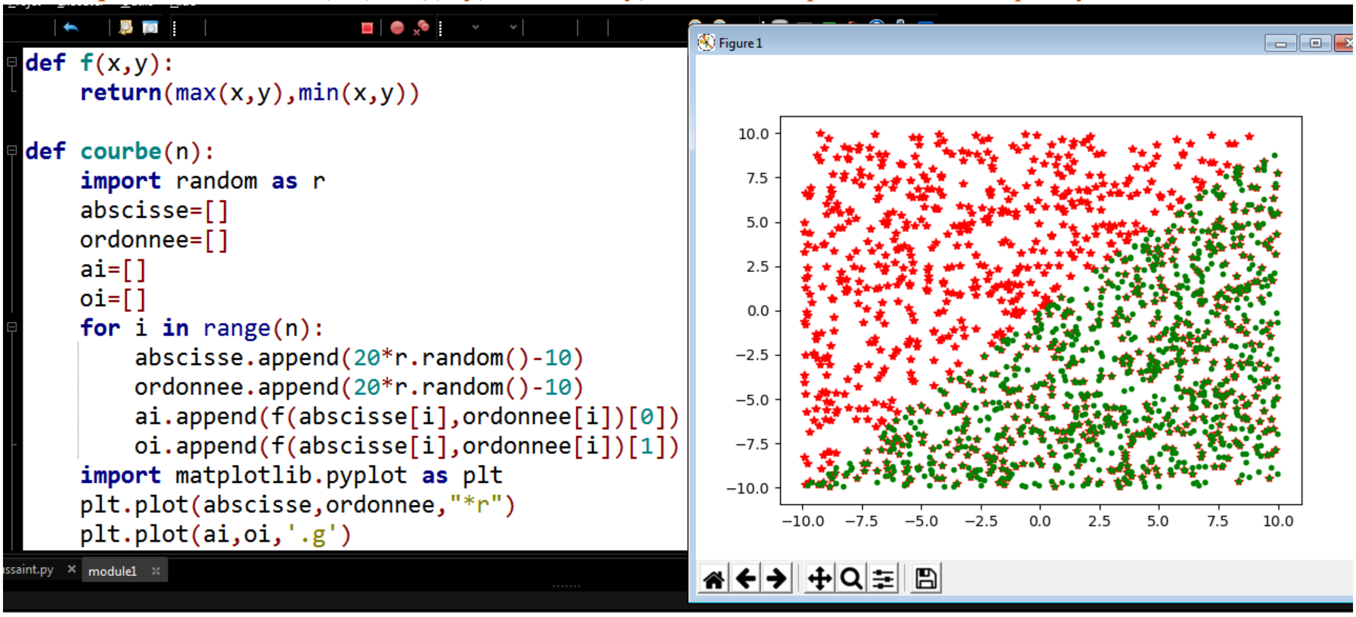
Donc h n’est pas injective.

2ième cas : h n’est pas surjective

En effet on a :

$$h\big((x,y)\big) = (2,3) \Leftrightarrow \begin{cases} \max(x;y) = 2 \\ \min(x;y) = 3 \end{cases} \Longrightarrow (x,y) \in \emptyset$$

Remarque : En fait on a $h(\mathbb{R}^2) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \geq y\}$. Là aussi on peut simuler cela par Python :



Exercice B.6 : On pose les applications suivantes :

$$f:\begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \longmapsto 2n \end{cases} \quad \text{et } g:\begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \longmapsto \begin{cases} \dfrac{n}{2} \text{ si } n \text{ pair} \\ 0 \text{ si } n \text{ impair} \end{cases} \end{cases}$$

a) Déterminer si f et g sont injectives ou surjectives.
b) Calculer fog et gof. Que pouvez-vous conclure ?

a) On pose :

$$f:\begin{cases}\mathbb{N}\to\mathbb{N}\\ n\longmapsto 2n\end{cases}$$

1er cas : f est injective

En effet on a :

$$f(n)=f(n')\Leftrightarrow 2n=2n'\Leftrightarrow n=n'$$

Donc f est injective.

2ième cas : f n'est pas surjective

$$f(n)=1\Longrightarrow 2n=1 \text{ et } n\in\mathbb{N}\Longrightarrow n\in\emptyset$$

Donc f n'est pas surjective.

Remarque : L'image directe de $\mathbb{N}$ par f est l'ensemble des nombres pairs.

De même on pose :

$$g:\begin{cases}\mathbb{N}\to\mathbb{N}\\ n\longmapsto\begin{cases}\frac{n}{2}\text{ si n pair}\\ 0\text{ si n impair}\end{cases}\end{cases}$$

1er cas : g n'est pas injective

En effet on a :

$$g(1)=0=g(3)$$

Donc g n'est pas injective.

2ième cas : g est surjective

$$\forall n'\in\mathbb{N}, n=g(2n)$$

Donc g est surjective.

b) On a :

$$\forall n\in\mathbb{N}, fog(n)=f\big(g(n)\big)=\begin{cases}f(0)\text{ si n impair}\\ f\left(\frac{n}{2}\right)\text{ si n pair}\end{cases}=\begin{cases}0\text{ si n impair}\\ n\text{ si n pair}\end{cases}$$

$$\forall n\in\mathbb{N}, gof(n)=g\big(f(n)\big)=g(2n)=n$$

On en déduit donc que $gof=Id_{\mathbb{N}}$ alors que $fog\neq Id_{\mathbb{N}}$. Ainsi f et g ne sont pas bijectives et non réciproque l'une de l'autre (ce qui n'a pas de sens). Cela donne un exemple de l'importance de démontrer que $fog=Id_{\mathcal{D}_g}$ et $gof=Id_{\mathcal{D}_f}$

Exercice B.7 : Soit f une application de E dans E tel que : fof = f.
a) Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.
b) Montrer que si f est injective ou surjective, alors $fof=Id_E$.

a) On doit démontrer une équivalence.

1er cas : On suppose que f est injective.

On a alors :

$$\forall x\in E, f(x)=f\big(f(x)\big)\Longrightarrow x=f(x)\text{ car f est injective}$$

On en déduit donc que f est surjective.

2ième cas : On suppose que f est surjective

On résout :

$$f(x)=f(x')$$

$$\begin{aligned}f(x)=f(x')&\Longrightarrow\exists(y,y')\in E^2, f\big(f(y)\big)=f\big(f(y')\big)\text{ car f est surjective, avec } f(y)=x\text{ et }f(y')=x'\\ &\Longrightarrow f(y)=\big(f(y')\big)\text{ avec }f(y)=x\text{ et }f(y')=x'\\ &\Longrightarrow x=x'\end{aligned}$$

Donc f est injective.

b) Si f est injective ou surjective, alors f est bijective d'après la question précédente. On en déduit donc qu'il existe g : $E\to E$ tel que $gof=fog=Id_E$. On a alors :

$$fof=f\Longrightarrow go(fof)=gof=Id_E\Longrightarrow(gof)of=Id_E\Longrightarrow f=Id_E$$

Exercice B.8 : Soient E un ensemble puis A une partie de E. Pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$, on pose :

$$\begin{cases} \varphi_A(X) = X \cap A \\ \psi_A(X) = X \cup A \end{cases}$$

1) Montrer que :
φ_A est injective $\Leftrightarrow \varphi_A$ est surjective $\Leftrightarrow$A=E
2) Montrer que :
ψ_A est injective $\Leftrightarrow \psi_A$ est surjective $\Leftrightarrow$A=$\emptyset$

1) On a :

$$\forall X \in \mathcal{P}(E), \varphi_A(\varphi_A(X)) = (X \cap A) \cap A = X \cap A = \varphi_A(X)$$

On en déduit donc d'après l'exercice B7 que : φ_A est injective $\Leftrightarrow \varphi_A$ est surjective
De même on sait que : $\varphi_A = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}(E)}$
On en déduit donc que :

$$\varphi_A(E) = E \cap A = E \Longrightarrow A \subset E \Longrightarrow A = E$$

On en déduit donc que : φ_A est injective $\Leftrightarrow \varphi_A$ est surjective $\Leftrightarrow$A=E
2) De même on a :

$$\forall X \in \mathcal{P}(E), \psi_A(\psi_A(X)) = (X \cup A) \cup A = X \cup A = \psi_A(X)$$

On a donc : $\psi_A o \psi_A = \psi_A$. Donc d'après la question précédente on sait que : ψ_A est injective $\Leftrightarrow \psi_A$ est surjective.
De même on sait que : $\psi_A = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}(E)}$
De plus on a :

$$\psi_A(\emptyset) = A \cup \emptyset = \emptyset$$

On en déduit donc que :

$$\psi_A \text{ est injective} \Leftrightarrow \psi_A \text{ est surjective} \Leftrightarrow A = \emptyset$$