Programme de Colle n°7
PCSI 2024-2025
(12 novembre au 15 novembre)

Nombres complexes

L'objectif de cette section, que l'on illustrera par de nombreuses figures, est de donner une solide pratique des nombres complexes, à travers les aspects suivants :

- *l'étude algébrique de l'ensemble $\mathbb{C}$ et la notion d'équation algébrique ;*
- *l'interprétation géométrique des nombres complexes et l'utilisation des nombres complexes en géométrie plane ;*
- *l'exponentielle complexe et ses applications à la trigonométrie.*

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Nombres complexes	
Parties réelle et imaginaire. Opérations sur les nombres complexes. Brève extension du calcul de $\sum_{k=0}^{n} x^k$, de la factorisation de $a^n - b^n$, de la formule du binôme.	La construction de $\mathbb{C}$ est hors programme.
Point du plan associé à un nombre complexe, affixe d'un point, affixe d'un vecteur.	On identifie $\mathbb{C}$ au plan usuel muni d'un repère orthonormé direct (« plan complexe »).
b) Conjugaison et module	
Conjugaison, compatibilité avec les opérations. Module. Relation $\lvert z\rvert^2 = z\bar{z}$, module d'un produit, d'un quotient. Inégalité triangulaire, cas d'égalité.	Image du conjugué dans le plan complexe. Interprétation géométrique de $\lvert z - z'\rvert$, cercles et disques.
c) Nombres complexes de module 1 et trigonométrie	
Identification du cercle trigonométrique et de l'ensemble des nombres complexes de module 1. Définition de e^{it} pour $t \in \mathbb{R}$. Exponentielle d'une somme.	Notation $\mathbb{U}$.
Formules d'Euler. Technique de l'angle moitié : factorisation de $1 \pm e^{it}$, de $e^{ip} \pm e^{iq}$.	Les étudiants doivent savoir retrouver les formules donnant $\cos(p) \pm \cos(q)$, $\sin(p) \pm \sin(q)$. Linéarisation, calcul de $\sum_{k=0}^{n} \cos(kt)$ et de $\sum_{k=0}^{n} \sin(kt)$.
Formule de Moivre.	Les étudiants doivent savoir retrouver les expressions de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos t$ et $\sin t$.
d) Forme trigonométrique	
Forme trigonométrique $re^{i\theta}$ $(r > 0)$ d'un nombre complexe non nul. Arguments. Arguments d'un produit, d'un quotient. Transformation de $a\cos t + b\sin t$ en $A\cos(t - \varphi)$.	
e) Équations algébriques	
Pour P fonction polynomiale à coefficients complexes admettant a pour racine, factorisation de $P(z)$ par $z - a$.	
Résolution des équations du second degré dans $\mathbb{C}$. Somme et produit des racines.	Calcul des racines carrées d'un nombre complexe donné sous forme algébrique.
f) Racines n-ièmes	
Description des racines n-ièmes de l'unité, d'un nombre complexe non nul donné sous forme trigonométrique.	Notation $\mathbb{U}_n$. Représentation géométrique.

g) Exponentielle complexe

Définition de e^z pour z complexe : $e^z = e^{\mathrm{Re}(z)}e^{i\,\mathrm{Im}(z)}$.
Exponentielle d'une somme.
Pour tous z et z' dans $\mathbb{C}$, $\exp(z) = \exp(z')$ si et seulement si $z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$.

Notations $\exp(z)$, e^z. Module et arguments de e^z.

h) Interprétation géométrique des nombres complexes

Interprétation géométrique des module et arguments de $\dfrac{c-a}{b-a}$.

Traduction de l'alignement, de l'orthogonalité.

Interprétation géométrique des applications $z \mapsto az$ et $z \mapsto z + b$ pour $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.
Interprétation géométrique de la conjugaison.

Il s'agit d'introduire certaines transformations du plan : translations, homothéties, rotations.
L'étude générale des similitudes est hors programme.

Chapitre VII : Ensemble et application

b) Ensembles

Ensemble, appartenance. Ensemble vide.
Inclusion. Partie (ou sous-ensemble).
Opérations sur les parties d'un ensemble : réunion, intersection, différence, complémentaire.

Notation $A \setminus B$ pour la différence et $E \setminus A$, $\overline{A}$ et A^c pour le complémentaire.

Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles.
Ensemble des parties d'un ensemble.

Notation $\mathscr{P}(E)$.

Recouvrement disjoint, partition.

d) Applications

Application d'un ensemble dans un ensemble.
Graphe d'une application.

Le point de vue est intuitif : une application de E dans F associe à tout élément de E un unique élément de F.
Le programme ne distingue pas les notions de fonction et d'application.
Notations $\mathscr{F}(E, F)$ et F^E.

Famille d'éléments d'un ensemble.
Fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble.

Notation $\mathbb{1}_A$.

Restriction et prolongement.

Notation $f|_A$.

Image directe.

Notation $f(A)$.

Image réciproque.

Notation $f^{-1}(B)$. Cette notation pouvant prêter à confusion, on peut provisoirement en utiliser une autre.

Composition.
Injection, surjection. Composée de deux injections, de deux surjections.
Bijection, réciproque. Composée de deux bijections, réciproque de la composée.

Notation f^{-1}. Compatibilité de cette notation avec celle de l'image réciproque.

Questions de cours :

Propriété I.b.1 : On a :

$$az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow z \in \left\{\frac{-b-\delta}{2a}; \frac{-b+\delta}{2a}, avec\ \delta^2 = b^2 - 4ac\right\}$$

Application II.a.4 : Démontrer l'équivalence suivante :

$$f\ est\ injective\ sur\ E\ \Leftrightarrow \forall (A, B) \in \mathcal{P}(E), f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

Propriété III.b.2 : Soient E, F deux ensembles tels que f ∈ $\mathcal{F}$(E; F) et g ∈ $\mathcal{F}$(F; G). On a :

- f et g injectives ⇒ g o f injective

g o f injective ⇒ f injective

- f et g surjectives ⇒ g o f surjective

g o f surjective ⇒ g surjective

- f et g bijectives ⇒ g o f bijective
  g o f bijective ⇒ f injective et g surjective

Exercices du type :

Application II.c.9 : Déterminer l´ensemble des nombres complexes tel que :

$$\frac{z-1}{z+2i} \in \mathbb{R}, i\mathbb{R}$$

Application II.e.6 : Application Linéarisation de $\cos^n(x)$ et $\sin^n(x)$ avec la formule d'Euler ou de Moivre.

Exercice G.5 : On pose l'équation (E) :

$$(E): 2z^3 - (3+4i)z^2 - (4-7i)z + 4 + 2i = 0$$

1) Montrer que (E) admet une solution réel.
2) En déduire toutes les solutions de (E).

Exercice G.11 : On pose $z = e^{\frac{2i\pi}{7}}$, $u = z + z^2 + z^4$ et $v = z^3 + z^5 + z^6$.
1) Calculer u+v puis u^2 en fonction de u et de v.
2) En déduire la valeur de :

$$S = \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)$$

Exercice A.2 : Démontrer que :

$$A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A \subset C$$

Exercice B.4 : On pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \longmapsto z^2 + z \end{cases}$$

On pose l'ensemble :

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} ; \left| z + \frac{1}{2} \right| = 2 \right\}$$

Déterminer $f(A)$ et $f^{-1}(\mathbb{R})$

Exercice B.5 : Déterminer si les applications suivantes sont injectives, surjectives et bijectives :

$$f: \begin{cases}]0;+\infty[\to [0;+\infty[\\ x \longmapsto x + \dfrac{1}{x} \end{cases} \qquad g: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x;y) \longmapsto (x+y; xy) \end{cases} \qquad h: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x;y) \longmapsto x - y^2 \end{cases}$$

$$f: \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \\ n \longmapsto \begin{cases} \dfrac{n}{2} \text{ si n pair} \\ -\dfrac{n+1}{2} \text{ si n impair} \end{cases} \end{cases} \qquad g: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x;y) \longmapsto (x-y; -2x+3y) \end{cases} \qquad h: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x;y) \longmapsto (\max(x;y) ; \min(x;y)) \end{cases}$$