Programme de Colle n°8
PCSI 2024-2025
(18 novembre au 22 novembre)

Chapitre 7 : Ensemble et application

b) Ensembles

Ensemble, appartenance. Ensemble vide. Inclusion. Partie (ou sous-ensemble).	
Opérations sur les parties d'un ensemble : réunion, intersection, différence, complémentaire.	Notation $A \setminus B$ pour la différence et $E \setminus A$, $\overline{A}$ et A^c pour le complémentaire.
Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles.	
Ensemble des parties d'un ensemble.	Notation $\mathscr{P}(E)$.
Recouvrement disjoint, partition.	

d) Applications

Application d'un ensemble dans un ensemble. Graphe d'une application.	Le point de vue est intuitif : une application de E dans F associe à tout élément de E un unique élément de F. Le programme ne distingue pas les notions de fonction et d'application. Notations $\mathscr{F}(E,F)$ et F^E.
Famille d'éléments d'un ensemble.	
Fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble.	Notation $\mathbb{1}_A$.
Restriction et prolongement.	Notation $f\|_A$.
Image directe.	Notation $f(A)$.
Image réciproque.	Notation $f^{-1}(B)$. Cette notation pouvant prêter à confusion, on peut provisoirement en utiliser une autre.
Composition.	
Injection, surjection. Composée de deux injections, de deux surjections.	
Bijection, réciproque. Composée de deux bijections, réciproque de la composée.	Notation f^{-1}. Compatibilité de cette notation avec celle de l'image réciproque.

Chapitre 8 – Primitives

Contenus	Capacités & commentaires
a) Calcul de primitives	
Primitives d'une fonction définie sur un intervalle à valeurs complexes. Lien entre intégrales et primitives.	Description de l'ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle connaissant l'une d'entre elles. On rappelle sans démonstration que, pour une fonction continue f, $x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ a pour dérivée f. On pourra noter $\int^{x} f(t)\mathrm{d}t$ une primitive générique de f.
Calcul des primitives, application au calcul d'intégrales.	Primitives de $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$, application aux primitives de $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$.
Primitives des fonctions exponentielle, logarithme, puissances, trigonométriques et hyperboliques, et des fonctions $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.	Les étudiants doivent savoir calculer les primitives de fonctions du type $x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$ et reconnaître les dérivées de fonctions composées.
Intégration par parties, changement de variable.	Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.

A l'ATTENTION des colleurs : Nous n'avons fait qu'une activité pour les changements de variables que nous ne verrons que lundi matin. Donc cela n'est pas au programme de colle, de même que l'intégration d'une fonction rationnelle (on peut tout de même le demander en guidant l'élève !). Nous n'avons pas encore fait beaucoup d'intégrations par partie mais cela est tout de même au programme de colle !

Questions de cours :

Application II.a.4 : Démontrer l'équivalence suivante :

$$f \text{ est injective sur } E \iff \forall(A,B) \in \mathcal{P}(E), f(A\cap B) = f(A)\cap f(B)$$

Propriété III.b.2 : Soient E, F deux ensembles tels que $f \in \mathcal{F}(E;F)$ et $g \in \mathcal{F}(F;G)$. On a :

- f et g injectives ⇒ g o f injective

g o f injective ⇒ f injective

- f et g surjectives ⇒ g o f surjective

g o f surjective ⇒ g surjective

- f et g bijectives ⇒ g o f bijective
  g o f bijective ⇒ f injective et g surjective

Propriété III.a.1 : Soit $(f,g) \in \left(\mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{K})\right)^2$. On a alors :

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt$$

Exercices du type :

Exercice B.5 : Déterminer si les applications suivantes sont injectives, surjectives et bijectives :

$$f: \begin{cases}]0;+\infty[\to [0;+\infty[\\ x \longmapsto x + \dfrac{1}{x} \end{cases} \qquad g: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x;y) \longmapsto (x+y;xy) \end{cases} \qquad h: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x;y) \longmapsto x - y^2 \end{cases}$$

$$f: \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \\ n \longmapsto \begin{cases} \dfrac{n}{2} \text{ si n pair} \\ -\dfrac{n+1}{2} \text{ si n impair} \end{cases} \end{cases} \qquad g: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x;y) \longmapsto (x-y;-2x+3y) \end{cases} \qquad h: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x;y) \longmapsto (\max(x;y);\min(x;y)) \end{cases}$$

Exemple II.a.4 : Déterminer toutes les primitives des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{2x}{1+x^2} \end{cases} \qquad g: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \cos^5(x)\sin(x) \end{cases} \qquad h: \begin{cases}]-1;1[\to]-1;1[\\ x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases}$$

Application II.b.2 : On pose :

$$f: \begin{cases}]1;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{1}{x\ln(x)} \end{cases}$$

Déterminer l'unique primitive de *f* qui s'annule en e^2

Application II.c.2 : Déterminer une primitive de :

$$g: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \cos(3x)\, e^{5x} \end{cases}$$

Application III.a.2 : Déterminer :

$$\int_0^\pi x\sin(5x)\,dx$$

Application III.a.3 : Déterminer :

$$\int^t \arctan(x)\,dx \text{ et } \int^u \ln(t)\,dt$$

Calcul de primitive du type : $x \longmapsto \cos^p(x)\sin^q(x)$