Correction DM n°2

Exercice 1 : Un peu de complexes

On pose :

$$f:\begin{cases}\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ z\mapsto \dfrac{\mathcal{Im}(z^5)}{\mathcal{Im}(z)^5}\end{cases}$$

1) Déterminer l'image de $1+i$.
2) a) Résoudre l'équation $\sin(\theta)=0$.
b) En déduire l'ensemble $f^{-1}(\{0\})$.
c) Montrer que f n'est pas injective.
3) On va montrer dans cette question que f n'est pas surjective.
a) Rappeler la formule du binôme de Newton.
b) On pose $z=x+iy,(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Montrer qu'il existe un polynôme Q tel que $f(z)=Q\left(\frac{x}{y}\right)$.
c) Etudier la fonction suivante sur $\mathbb{R}$ $x\mapsto 5x^4-10x^2+1$.
d) En déduire la valeur de :

$$m=\min_{z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}}\frac{\mathcal{Im}(z^5)}{\mathcal{Im}(z)^5}=\min\left(\frac{\mathcal{Im}(z^5)}{\mathcal{Im}(z)^5},z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}\right)$$

e) Déterminer $f^{-1}(\{m\})$.
f) Montrer que f n'est pas surjective.

1) On sait que :

$$(1+i)^5=\left(\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^5=4\sqrt{2}e^{\frac{i5\pi}{4}}\Longrightarrow \mathcal{Im}((1+i)^5)=\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)=-4\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}=-4$$

De plus on sait que $\mathcal{Im}(1+i)=i\Longrightarrow\left(\mathcal{Im}(1+i)\right)^5=\mathcal{Im}(i^5)=1$
On en déduit donc que :

$$f(1+i)=-4$$

2) a) On sait que :

$$\sin(\theta)=0\Leftrightarrow\theta=n\pi,n\in\mathbb{Z}$$

b) On sait que :

$$f^{-1}(\{0\})=\{z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R},\mathcal{Im}(z^5)=0\}$$

On pose $z=re^{i\theta}$. On a alors :

$$\mathcal{Im}(z^5)=r^5\sin(5\theta)$$

On en déduit donc que :

$$\mathcal{Im}(z^5)=0\Leftrightarrow\sin(5\theta)=0\Leftrightarrow\theta=\frac{n\pi}{5},n\in\mathbb{Z}$$

De plus ici $z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, donc $\theta\neq k\pi,k\in\mathbb{Z}$
On pose $A=\{5k,k\in\mathbb{Z}\}$ =l'ensemble des multiples de 5.
On en déduit donc que :

$$f^{-1}(\{0\})=\left\{z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R},\arg(z)=\frac{n\pi}{5},n\in\mathbb{Z}\backslash A\right\}$$

c) On a :

$$f\left(e^{\frac{2i\pi}{5}}\right)=0=f\left(e^{\frac{i\pi}{5}}\right)$$

Donc f n'est pas injective.
3) a) On sait que :

$$\forall(a,b)\in\mathbb{C},\forall n\in\mathbb{N},(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$$

b) On sait que :

$$(x+iy)^5=x^5+5x^4iy-10x^3y^2-10x^2iy^3+5xy^4+iy^5$$

On en déduit donc que :

$$f(x+iy)=\frac{5x^4y-10x^2y^3+y^5}{y^5}=5\left(\frac{x}{y}\right)^4-10\left(\frac{x}{y}\right)^2+1=Q\left(\frac{x}{y}\right) \text{ avec } Q(X)=5X^4-10X^2+1$$

c) On sait que $Q\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et :

$$\forall x\in\mathbb{R}, Q'(x)=20x^3-20x=20x(x^2-1)$$

On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$Q'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
Q	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	1	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

d) On en déduit donc que :

$$m=\min_{z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}}\frac{\mathfrak{Im}(z^5)}{\mathfrak{Im}(z)^5}=\min\left(\frac{\mathfrak{Im}(z^5)}{\mathfrak{Im}(z)^5}, z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}\right)=-4$$

e) On a :

$$f^{-1}(\{m\})=\{z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}, f(z)=-4\}=\{x+ix, x-ix, x\neq 0\}$$

f) On sait que :

$$f^{-1}(\{-5\})=\emptyset$$

On en déduit donc que f n'est pas surjective.

Exercice 2 : Une bijection sur un sous-ensemble de $\mathbb{C}$

Dans tout cet exercice on pose :

$$f:\begin{cases}\mathbb{C}\backslash\{-i\}\to\mathbb{C}\\ z\mapsto\dfrac{z-i}{iz-1}\end{cases}$$

1) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{C}\backslash\{i\}$ dans un sous-ensemble de $\mathbb{C}$ à déterminer, puis déterminer une expression de $f^{-1}(z)$.

2) Déterminer $f^{-1}(\mathbb{R})=\{z\in\mathbb{C} \textit{ tel que } f(z)\in\mathbb{R}\}$.

3) Démontrer que l'équation $f(z)=z$ admet deux solutions distinctes.

4) Dans cette question on souhaite montrer que :

$$f^{-1}(\mathbb{U}\backslash\{-i\})=\mathbb{R}$$

a) Montrer que :

$$\forall\theta\in\mathbb{R}, 1-e^{i\theta}=-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\frac{i\theta}{2}}$$

b) En déduire que :

$$\forall\theta\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[, f(z)=e^{i\theta}\Leftrightarrow z=\frac{-1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$$

c) Démontrer que :

$$\forall x\in\mathbb{R}, \exists!\,\theta\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[\textit{ tel que } x=\frac{-1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$$

d) Conclure.

5) a) Soit $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$. Rappeler les solutions de $z^n=1$.

b) Résoudre l'équation $\left(f(z)\right)^n=1$.

1) Soit $z'\in\mathbb{C}$. On résout :

$$f(z)=z'\Leftrightarrow\frac{z-i}{iz-1}=z'\Leftrightarrow z(1-iz')=i-z'$$

1^er^ cas : Si $1-iz'=0$

On sait que :

$$1-iz'=0\Leftrightarrow z'=-i$$

Or on a :

$$i-(-i)=2i\neq 0$$

On en déduit que $f(z) = -i \Leftrightarrow z \in \emptyset$

$2^{\text{ième}}$ cas : $1 - iz' \neq 0$

On a alors :

$$f(z) = z' \Leftrightarrow z = \frac{i - z'}{1 - iz'} = \frac{z' - i}{iz' - 1} = f(z')$$

On en déduit donc que f est bijective de $\mathbb{C}\backslash\{-i\}$ dans lui-même et qu'elle est involutive : $f^{-1} = f$.

2) On sait que $f^{-1}(\mathbb{R}) = \{z \in \mathbb{C}\backslash\{-i\}, \mathcal{I}m(f(z)) = 0\}$.

On pose $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0; -1)\}$. On a alors :

$$\begin{aligned} f(x+iy) &= \frac{x + i(y-1)}{(-1-y) + ix} \\ &= \frac{\big(x + i(y-1)\big)\big(-(y+1) - ix\big)}{(1+y)^2 + x^2} \\ &= \frac{-x(y+1) + x(y-1)}{(1+y)^2 + x^2} + i\frac{-x^2 + 1 - y^2}{(1+y)^2 + x^2} \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |z| = 1 \Leftrightarrow z \in \mathbb{U}\backslash\{-i\}$$

3) On résout :

$$f(z) = z \Leftrightarrow \frac{z - i}{iz - 1} = z \Leftrightarrow iz^2 - 2z + i = 0$$

On a : $\Delta = 4 - 4i^2 = 8$

On en déduit donc que l'équation admet deux solutions distinctes car $\Delta \neq 0$. On ne cherche pas forcément les solutions (Ce n'est pas demandé !).

Les voici tout de même :

$$\frac{\mathbf{z - i}}{\mathbf{iz - 1}} = \mathbf{z} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{z_1} = \dfrac{\mathbf{2 - 2\sqrt{2}}}{\mathbf{2i}} = \mathbf{i(\sqrt{2} - 1)} \\ \quad\quad\mathbf{ou} \\ \mathbf{z_2} = \dfrac{\mathbf{2 + 2\sqrt{2}}}{\mathbf{2i}} = \mathbf{-i(1 + \sqrt{2})} \end{cases}$$

4) a) On sait que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, 1 - e^{i\theta} = e^{\frac{i\theta}{2}}\left(e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}}\right) = -2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\frac{i\theta}{2}}$$

b) On sait que :

$$\begin{aligned} \forall \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[, f(z) = e^{i\theta} &\Leftrightarrow \frac{z - i}{iz - 1} = e^{i\theta} \\ &\Leftrightarrow z\left(1 - ie^{i\theta}\right) = i - e^{i\theta} \\ &\Leftrightarrow z\left(1 - e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}\right) = i\left(1 + e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}\right) \\ &\Leftrightarrow -2izsin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} = 2icos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \\ &\Leftrightarrow \boldsymbol{z = -\frac{1}{tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}} \end{aligned}$$

Remarque : On peut aussi utiliser que :

$$f(z) = e^{i\theta} \Leftrightarrow z = f\left(e^{i\theta}\right) \Leftrightarrow z = \frac{e^{i\theta} - e^{\frac{i\pi}{2}}}{e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)} - 1} = \frac{e^{i\theta} + e^{-\frac{i\pi}{2}}}{e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)} - 1} = \frac{e^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \times 2cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}2isin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} =$$

$$= -i \times \frac{cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{i \times sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$$

c) On pose :

$$g: \theta \mapsto -\frac{1}{tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \text{ pour } \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}; 3\frac{\pi}{2}\right[$$

On sait que $g \in \mathcal{D}^1\left(\left]-\frac{\pi}{2};3\frac{\pi}{2}\right[\right)$ *et*:

$$\forall \theta \in \left]-\frac{\pi}{2};3\frac{\pi}{2}\right[, g'(\theta) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} < 0$$

Donc g est strcitement décroissante. De plus on a :

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{\theta \to -\frac{\pi}{2} \\ \theta > -\frac{\pi}{2}}} \frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4} = 0^+ \\ \lim\limits_{X \to 0^+} \frac{\cos(X)}{\sin(X)} = +\infty \end{cases} \underset{Par\ composé}{\Longrightarrow} \lim\limits_{\substack{\theta \to -\frac{\pi}{2} \\ \theta > -\frac{\pi}{2}}} g(\theta) = +\infty$$

De même on a :

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{\theta \to 3\frac{\pi}{2} \\ \theta < 3\frac{\pi}{2}}} \frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4} = \pi^- \\ \lim\limits_{X \to \pi^-} \frac{\cos(X)}{\sin(X)} = -\infty \end{cases} \underset{Par\ composé}{\Longrightarrow} \lim\limits_{\substack{\theta \to 3\frac{\pi}{2} \\ \theta < 3\frac{\pi}{2}}} g(\theta) = -\infty$$

Ainsi g est :

_ Continue sur $\left]-\frac{\pi}{2};3\frac{\pi}{2}\right[$

_ Strictement décroissante sur $\left]-\frac{\pi}{2};3\frac{\pi}{2}\right[$

D'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2};3\frac{\pi}{2}\right[$ dans $\left]\lim\limits_{\substack{\theta \to -\frac{\pi}{2} \\ \theta > -\frac{\pi}{2}}} g(\theta); \lim\limits_{\substack{\theta \to 3\frac{\pi}{2} \\ \theta < 3\frac{\pi}{2}}} g(\theta)\right[= \mathbb{R}$

On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{\forall x \in \mathbb{R}, \exists!\, \theta_x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[\ tel\ que\ x = \frac{-\cos\left(\frac{\theta_x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{sin\left(\frac{\theta_x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}}$$

d) Il faut montrer que :

$$f^{-1}(\mathbb{U}\backslash\{-i\}) = \mathbb{R}$$

On peut raisonner par double-inclusion :

1er cas : Montrons que $f^{-1}(\mathbb{U}\backslash\{-i\}) \subset \mathbb{R}$

Soit z $\in f^{-1}(\mathbb{U}\backslash\{-i\})$. On en déduit donc que :

$$\exists \theta \in \left]-\frac{\pi}{2};3\frac{\pi}{2}\right[\ tel\ que\ f(z) = e^{i\theta}$$

Donc d'après la question précédente :

$$z = \frac{-\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} \in \mathbb{R}$$

Ainsi on a :

$$\boldsymbol{f^{-1}(\mathbb{U}\backslash\{-i\}) \subset \mathbb{R}}$$

2ième cas : Montrons que $f^{-1}(\mathbb{U}\backslash\{-i\}) \supset \mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait d'après la question précédente que :

$$\exists!\, \theta_x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[\ tel\ que\ x = \frac{-\cos\left(\frac{\theta_x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{sin\left(\frac{\theta_x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$$

On a donc :

$$x = f\left(e^{i\theta_x}\right)$$

On a donc :

$$\boldsymbol{\mathbb{R} \subset f^{-1}(\mathbb{U}\backslash\{-i\})}$$

5) a) On sait que :

$$z^n = 1 \Leftrightarrow z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in [\![0; n-1]\!]$$

b) On sait que :

$$\left(f(z)\right)^n = 1 \Leftrightarrow f(z) = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \Leftrightarrow z = \frac{-\cos\left(\frac{k\pi}{n}+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}+\frac{\pi}{4}\right)} \; avec \; k \in [\![0; n-1]\!]$$

Remarque : L'énoncé est ici est mal fait ! La question 4) nous demande de montrer que :

$$f^{-1}(\mathbb{U}\backslash\{-i\}) = \mathbb{R}$$

Dans les questions et 2 et 3, on a démontré que f était bijective, que $f^{-1} = f$ et que $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{U}\backslash\{-i\}$. On a donc :

$$f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{U}\backslash\{-i\} \Leftrightarrow f(\mathbb{R}) = \mathbb{U}\backslash\{-i\} \Leftrightarrow \mathbb{R} = f^{-1}(\mathbb{U}\backslash\{-i\})$$

Donc il n'y a aucun calcul à faire. Ce que je viens de faire précédemment, nous ne pouvons le faire que si f est bijective. Sinon on peut avoir $f(A) = B$ et $f^{-1}(B) \neq A$. Il suffit de prendre $f: x \mapsto x^2, A = [0; 1] \; et \; B = [0; 1]$. On a alors :

$$f(A) = B \; et \; f^{-1}(B) = [-1; 1] \neq A$$

Mais ici il n'y a aucun problème !