Activité 9.C.2 : Suite arithmético géométrique

Un loueur de voitures dispose au 1er mars 2015 d'un total de 10 000 voitures pour l'Europe.
Afin d'entretenir son parc, il décide de revendre, au 1er mars de chaque année, 25 % de son parc automobile et d'acheter 3 000 voitures neuves.

On modélise le nombre de voitures de l'agence à l'aide d'une suite :
Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre de voitures présentes dans le parc automobile au 1er mars de l'année $2015+n$.
On a donc $u_0 = 10000$.

1. Expliquer pourquoi pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,75u_n + 3000$.
2. Pour tout entier naturel n, on considère la suite (v_n) définie par
$$v_n = u_n - 12000.$$
   (a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,75. Préciser son premier terme.
   (b) Exprimer v_n en fonction de n.
   Déterminer la limite de la suite (v_n).
   (c) Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_n = 12000 - 2000 \times 0,75^n$.
   (d) En vous appuyant sur les réponses données aux deux questions précédentes, que pouvez-vous conjecturer sur le nombre de voitures que comptera le parc automobile de ce loueur au bout d'un grand nombre d'années ?
3. On admet dans cette question que la suite (u_n) est croissante.
On aimerait déterminer l'année à partir de laquelle le parc automobile comptera au moins 11 950 voitures.

(a) Recopier l'algorithme suivant et compléter les pointillés afin qu'il permette de répondre au problème posé.

Initialisation	U prend la valeur 10 000
	N prend la valeur 0
Traitement	Tant que …
	N prend la valeur …
	U prend la valeur …
	Fin Tant que
Sortie	Afficher …

(b) À l'aide de la calculatrice, déterminer l'année recherchée.
(c) Retrouver ce résultat en résolvant l'inéquation
$$12000 - 2000 \times 0,75^n \geqslant 11950.$$

4. On suppose dans cette question qu´il vend toutes ces voitures au prix de 5000€. Quelle somme d´argents les voitures vendues lui auront rapportées en 10 ans ?