Chapitre 9 : Suites numériques
Partie A : Propriété de la borne supérieure

I) Plus petit ou plus grand élément

a) Majorant et minorant

Dans toute ce paragraphe, A désigne une partie non vide de $\mathbb{R}$

Définition (Majorant, minorant, minimum et maximum) :

- On dit que M est un majorant de A si et seulement si :
$$\forall\, x \in A, x \leq M$$
- On dit que m est un minorant de A si et seulement si :
$$\forall\, x \in A, x \geq m$$
- On dit que A est bornée si et seulement si A est majorée et minorée :
$$\exists\, (m; M) \in \mathbb{R}^2, \forall\, x \in A, m \leq x \leq M$$

Exemple I.a.1 : Déterminer si les ensembles suivants sont majorés, minorée, bornée
$$A = \mathbb{R}_+^* \,;\, B = [0;1[\,;\, C = \mathbb{Z} \text{ et } D = \left\{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

Remarque : Un majorant ou minorant d'une partie non vide de A ne sont pas uniques !!
Les définitions suivantes viennent préciser certains majorants et minorants.

b) Maximum et minimum

Définition (minimum et maximum) :

- On dit que M est le maximum de A si et seulement si :
$$\begin{cases} \text{M est un majorant de A } (\forall\, x \in A, x \leq M) \\ M \in A \end{cases}$$

On le note :
$$M = \max(A)$$

- On dit que m est le minimum de A si et seulement si :
$$\begin{cases} \text{m est un minorant de A } (\forall\, x \in A, x \geq m) \\ m \in A \end{cases}$$

On le note :
$$m = \min(A)$$

Exemple I.b.1 : On a :
$$\max([2;5]) = 5 \qquad \min(\mathbb{N}) = 0$$
ATTENTION : Une partie non vide majorée (resp minorée) de $\mathbb{R}$ ne possède pas nécessairement de maximum (resp minimum).

Contre-exemple I.b.2 : Montrer que $B = [0;1[$ ne possède pas de maximum.

c) Bornes supérieures ou inférieurs

Définition (borne supérieure et inférieure) :

- Si A est majorée on appelle sup(A) la borne supérieure de A qui est le plus petit des majorants de A
- Si A est minorée on appelle inf(A) la borne inférieure de A qui est le plus grand des minorants de A.

Remarque : Si A possède un maximum (resp un minimum) alors on a :
$$\sup(A) = \max(A) \;\; (resp \;\; \inf(A) = \min(A))$$

Exemple I.c.1 : Compléter le tableau suivant :

	min(A)	inf(A)	max(A)	sup(A)
$A = \{3\}$				
$A = \{2; 5\}$				
$A = [-2; 3[$				
$A =]2; 7[$				
$A = \left\{\frac{1}{n+1}; n \in \mathbb{N}\right\}$				

Propriété I.c.2 : Toute partie non vide majorée de ℝ admet une borne supérieure.
Toute partie non vide minorée de ℝ admet une borne inférieure.

Démo : (Admis) Cela provient de la construction de ℝ.

II) Partie entière et approximation décimale

a) La partie entière

Propriété III.a.1 : Pour tout réel x, il existe un unique entier p tel que $p \leq x < p + 1$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists!\, p \in \mathbb{Z}, p \leq x < p + 1$$

Définition : Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit p l'unique entier tel que :

$$p \leq x < p + 1$$

On appelle alors p la partie entière de x, noté $\lfloor x \rfloor$ ou E(x).

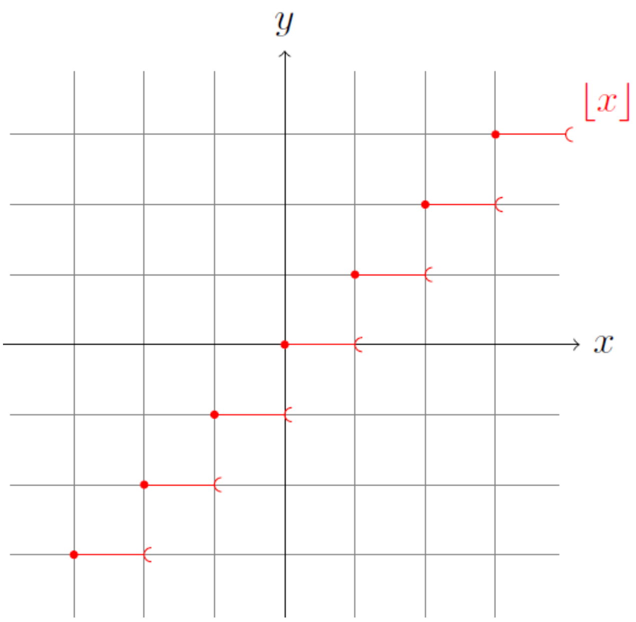
Exemple II.a.2 : Déterminer les valeurs suivantes :

$$A = \lfloor 2{,}4 \rfloor; \quad B = \lfloor 7{,}978 \rfloor; C = \lfloor 8 \rfloor; \quad D = \lfloor -4{,}12 \rfloor$$

On pose :

$$E : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{Z} \\ x \longmapsto \lfloor x \rfloor \end{cases}$$

On a alors la courbe représentative de E ci-contre.



b) Approximation décimale

Propriété II.b.1 : Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, p_n = \lfloor 10^n x \rfloor$$

On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{p_n}{10^n} \leq x \leq \frac{p_n + 1}{10^n}$$

Définition :
Le nombre décimal $\frac{p_n}{10^n}$ est appelé <u>approximation décimale par défaut</u> de x à la précision 10^{-n}.
Le nombre décimal $\frac{p_n+1}{10^n}$ est appelé <u>approximation décimale par excès</u> de x à la précision 10^{-n}.

Exemple II.b.2: Déterminer un encadrement de $\sqrt{2}$ à 10^{-2} et un encadrement de π à 10^{-4}

Application II.b.3 : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de $\mathbb{Q}$ telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x$$

On dit alors que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

IV) Intervalle de $\mathbb{R}$

Cette partie a déjà été traité dans le Chapitre 4.1 : Inégalité dans $\mathbb{R}$

Définition (intervalle de $\mathbb{R}$) : On dit que I est un intervalle de $\mathbb{R}$ si et seulement si :
- $I = [a;b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}, (a;b) \in \mathbb{R}^2$
- $[a;b[= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}, (a;b) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \cup \{-\infty;+\infty\})$
- $]a;b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}, (a;b) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty;+\infty\}) \times \mathbb{R}$
- $]a;b[= \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}, (a;b) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty;+\infty\})^2$

Exemple IV.1 : $I = [2;5]$; $J =]-\infty;9]$

ATTENTION : Une réunion disjointe d'intervalles de $\mathbb{R}$ n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$.

Propriété IV.b.2 (Caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$) : On a l'équivalence suivante :

$$I \text{ est un intervalle de } \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall\, (x_1;x_2) \in I^2, [x_1;x_2] \subset I$$

Remarque : Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont dits « <u>sans trou</u> ». En particulier $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$.

Application IV.b.3 : Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ tels que $I \cap J \neq \emptyset$. Alors $I \cup J$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.