Chapitre 9 : Suites numériques
Partie B : Généralités sur les suites numériques

I) Introduction aux suites numériques

a) Les suites numériques : des fonctions de ℕ dans ℝ

Définition : Une suite réelle notée u ou est une application de ℕ dans ℝ :

$$u : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \mapsto u(n) \end{cases}$$

Pour tout n entier naturel, u(n), généralement noté u_n, est appelé terme d'indice ou de rang n. La suite u peut alors être notée de (u_n) ou $(u_n)_n$ ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
L'ensemble des suites réelles est noté :

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(u_n)\,;\, \forall\, n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{R}\}$$

Exemple I.a.1 : On pose :

$$u : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \mapsto \dfrac{1}{n+1} \end{cases}$$

Remarque : Il se peut qu'une suite numérique ne commence qu'à l'indice 1, 2 ou même « bien plus tard » ! Lorsque l'on définit une suite numérique, il convient de bien préciser son ensemble de définition (partie non vide de ℕ !).

Exemple I.a.2 : Déterminer les ensembles de définition des suites suivantes :

$$u : n \mapsto \frac{1}{n}\,; \quad v : n \mapsto \frac{1}{(n-1)(n-2)}\,; \qquad w :\ n \mapsto \sqrt{n^2 - 3n - 10}$$

ATTENTION : Il ne faut pas confondre le n-ième terme de la suite u avec le terme de rang n. On peut avoir un décalage d'indice.

Exemple I.a.3: Déterminer le 6-ième terme de la suite :

$$u : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \mapsto \dfrac{1}{n+1} \end{cases}$$

Remarque : On retrouve cela dans le logiciel de programmation Python pour le rang d'une liste.

```
>>> a=[i**3 for i in range(2,8)]
>>> print(a)
[8, 27, 64, 125, 216, 343]
>>> a[2]
64
>>> a[0]
8
>>> a[2:5]
[64, 125, 216]
```

b) Différentes façons de définir une suite numérique

Définition : On peut définir une suite numérique de trois façons différentes :

- Par une formule explicite : chaque terme de la suite est donné directement en fonction de n :
$$u_n = f(n)$$
- Par une formule de récurrence : u_n est exprimé en fonction de n et des termes précédents :
$$u_n = f(u_{n-1}) \text{ ou } u_n = f(u_{n-1}, u_{n-2}) \ldots$$
- Par une formule implicite : Le terme général u_n de la suite est solution unique d'une équation dépendant de n.

Exemple I.b.1 :

1) $u : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \mapsto n^2 + 3n - 6 \end{cases}$ 2) $u : \begin{cases} u_0 = 5 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, u_n = 2u_{n-1} + 3 \end{cases}$ 3) u_n est l'unique solution de $x^3 + x = n$

Application I.b.2 : Ecrire les suites qui correspondent aux programmes Python suivant :

```
def masuite(n):
    a=[]
    for i in range(0,n+1):
        a.append((i**2-3)/(1+i))
    print(a)
```

```
def masuite2(n):
    a=[1]
    for i in range(1,n+1):
        a.append(a[i-1]*2+3)
    print(a)
```

Définition (graphe d'une suite) : On appelle représentation graphique d'une suite numérique l'ensemble des points de coordonnées $(n\,;u_n)$:

$$\mathcal{C}_u = \{(n; u_n); n \in \mathbb{N}\}$$

Exemple I.b.3 : Déterminer la représentation graphique de la suite :

$$u : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \mapsto \dfrac{1}{n+1} \end{cases}$$

Remarque : On verra plus tard comment représenter les termes d'une suite définie par récurrence.

c) Opérations sur les suites

Définition : Soient u et v deux suites réelles. On a alors :

- La somme de u et v est la suite notée (u+v) définie par :
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, (u+v)_n = u_n + v_n$$
- Le produit de u et v est la suite notée (u×v) définie par :
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, (u \times v)_n = u_n \times v_n$$
- Le produit de u par un scalaire λ est la suite notée (λ ×u) définie par :
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, (\lambda u)_n = \lambda u_n$$

II) Suites réelles et relation d'ordre

a) Suites monotones

Définition : Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

- On dit que la suite u est croissante (resp strictement croissante) si et seulement si :
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n \text{ (resp } u_{n+1} > u_n)$$
- On dit que la suite u est décroissante (resp strictement décroissante) si et seulement si :
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n \text{(resp } u_{n+1} < u_n)$$

On dit qu'une suite est monotone si elle est croissante ou décroissante.

Exemple II.a.1 : Déterminer le sens de variation des suites suivantes :

$$u : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \mapsto \dfrac{1}{n+1} \end{cases} \quad v : \begin{cases} u_0 = 5 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, u_n = 2u_{n-1} + 3 \end{cases}$$

Remarque : Pour montrer qu'une suite u est monotone on peut étudier :

- Le signe de $u_{n+1} - u_n$:
$$u \text{ est croissante } \Leftrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \geq 0$$
$$u \text{ est décroissante } \Leftrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \leq 0$$
- Le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ seulement si la suite u est positive :
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \textit{ et } u_n > 0 \Longrightarrow u \text{ est croissante}$$
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 \textit{ et } u_n > 0 \Longrightarrow u \text{ est décroissante}$$

Application II.a.2 : Déterminer le sens de variation des suites suivantes :

$$u : \begin{cases} \mathbb{N}^* \to \mathbb{R} \\ n \mapsto \dfrac{n!}{n^n} \end{cases} \quad v : \begin{cases} \mathbb{N}^* \to \mathbb{R} \\ n \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \end{cases}$$

b) Suites bornées

Définition : On dit qu'une suite u est :

- majorée s'il existe M∈ℝ tel que :
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$$
- minorée s'il existe m∈ℝ tel que :
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$$
- bornée si elle est majorée et minorée :
$$\exists\,(m, M) \in \mathbb{R}^2, \forall\, n \in \mathbb{N}, m \leq u_n \leq M$$

Exemple II.b.1 : Donner trois suites u,v et w tels que u soit majorée non minorée, v minorée non majorée et w bornée.

Propriété II.b.2 : Une suite u est bornée si et seulement si la suite |u| est majorée.

c) Suite stationnaire

Définition : On dit qu'une suite est stationnaire si et seulement si :

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \forall\, n \geq n_0\ u_n = u_{n_0}$$

Exemple II.c.1 : On pose :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n = \prod_{k=0}^{n}(100 - k)$$

III) Limite d'une suite numérique

a) Limite infinie

Définition : Soit (u_n) une suite numérique. On dit que (u_n) diverge vers $+\infty$ si pour tout réel A (aussi grand soit-il !!), il existe un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $]A\,;\,+\infty[$.

$$\forall\, A\ \in \mathbb{R}, \exists\, n_0\ \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall\, n \geq n_0, u_n > A$$

On note alors :

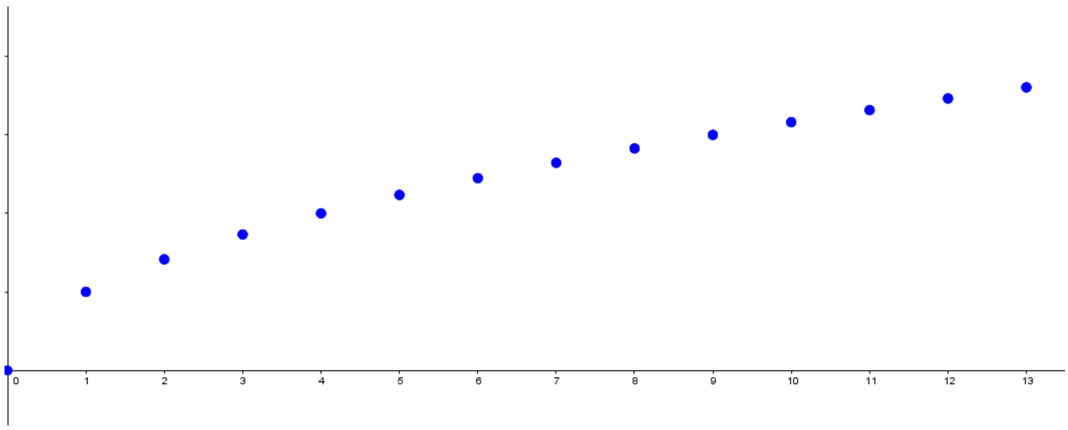
$$\lim_{x \to +\infty} u_n = \lim u_n = +\infty \text{ ou encore } u_n \underset{n \to +\infty}{\to} +\infty \quad \text{ou } u_n \to +\infty$$

Exemple III.a.1 : On pose la suite définie par :

$$\forall\, n\ \in \mathbb{N}, u_n = n^2$$

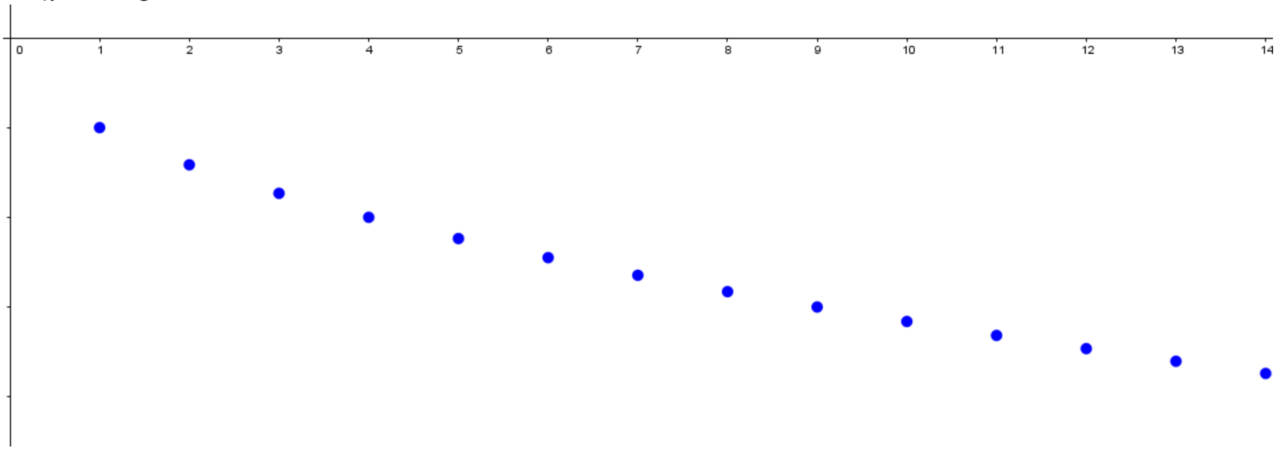
Alors la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

Remarque : On a de même :



$$\lim u_n = -\infty \iff \forall\, A\ \in \mathbb{R}, \exists\, n_0\ \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall\, n \geq n_0, u_n < A$$

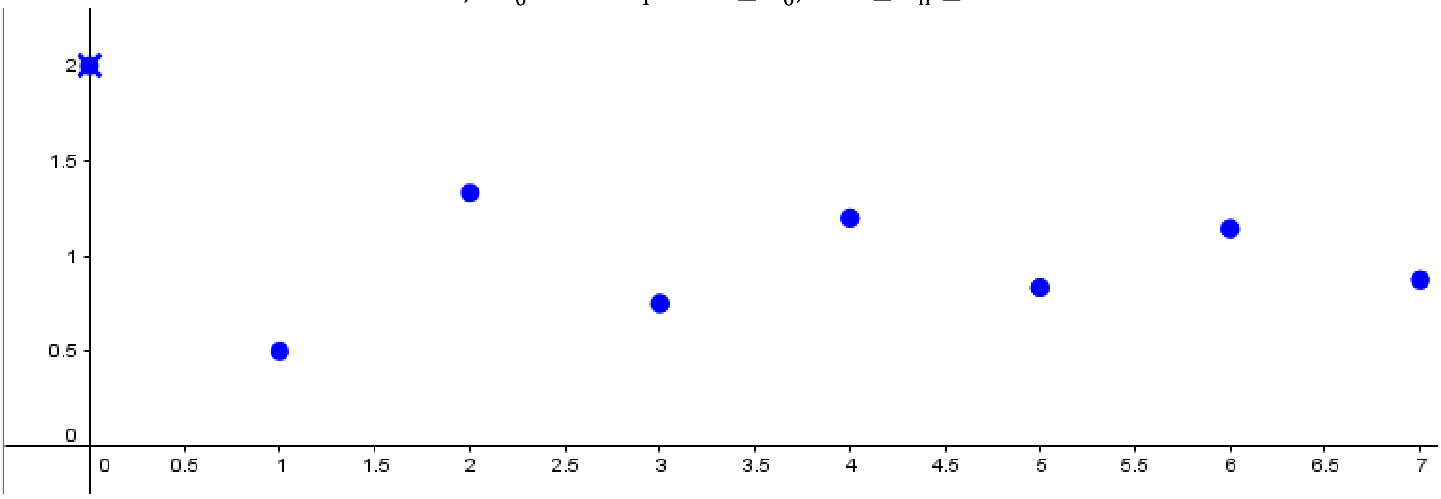
Alors (u_n) diverge vers $-\infty$.



b) Limite finie d´une suite numérique

Définition : Soit (u_n) une suite numérique. On dit que (u_n) converge vers l si pour tout ε>0 (aussi petit soit-il !!), il existe un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $]l-\varepsilon\,;\,l+\varepsilon[$.

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall\, n \geq n_0, l-\varepsilon \leq u_n \leq l+\varepsilon$$



On note alors :

$$\lim_{x\to+\infty} u_n = \lim u_n = \ell \text{ ou encore } u_n \underset{n\to+\infty}{\to} \ell \text{ ou } u_n \to \ell$$

Exemple III.b.1: On a :

$$\forall\, q \in]0\,;1[\,, \lim_{n\to+\infty} q^n = 0$$

Propriété III.b.2 : On a l'équivalence suivante :

$$\lim u_n = \ell \iff \lim|u_n - \ell| = 0$$

Application III.b.3 Démontrer que :

$$\forall\, q \in]-1\,;1[\,, \lim_{n\to+\infty} q^n = 0$$

Propriété III.b.4 : Si la suite u converge, alors sa limite est unique.

Propriété III.b.5 : On a l'implication suivante :

$$\lim u_n = \ell \implies \lim|u_n| = |\ell|$$

ATTENTION : La réciproque est fausse !!!

Contre-exemple III.b.6 : Déterminer une suite u qui converge en valeur absolue mais qui ne converge pas.

Propriété III.b.7 : Toute suite convergence est bornée.

Propriété III.b.8 : Soit a un réel et u une suite tels que u converge vers ℓ et :

$$\begin{cases} \forall\, n \in \mathbb{N}, u_n < a \\ u_n \to \ell \end{cases} \Rightarrow \ell \leq a$$

c) Opérations sur les limites

On a les tableaux suivants :

Limite de $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) =$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

Limite de $(u_n \times v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	l	$l \neq 0$	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	l'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) =$	$l \times l'$	$\pm\infty$ La règle des signes donne le signe du produit	$\pm\infty$	Forme indéterminée

Limite de $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	$+\infty$ ou $-\infty$	$\ell \neq 0$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	0	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{u_n}{v_n}\right)$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	Forme indeterminé	$\pm\infty$	Forme indeterminé

IV) Théorème d'existence d'une limite

a) Convergence des suites monotones bornées

Propriété IV.a.1 : (Théorème de la limite monotone) :

1) Toute suite u croissante majorée converge et :

$$\lim u_n = \sup\{u_n ; n \in \mathbb{N}\}$$

2) Toute suite u croissante non majorée diverge vers $+\infty$
3) Toute suite u décroissante minorée converge et :

$$\lim u_n = \inf\{u_n ; n \in \mathbb{N}\}$$

4) Toute suite u décroissante non minorée diverge vers $-\infty$

Application IV.a.2 : Montrer que la suite suivante converge :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

Application IV.a.3 : Montrer que la suite suivante diverge :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

b) Minoration ou majoration

Propriété IV.b.1 : (Théorème des gendarmes) : Soit ℓ un réel et deux suites (u_n) et (v_n) qui convergent vers ℓ. Soit (w_n) une suite telle qu´à partir d´un certain rang : $u_n \leq w_n \leq v_n$. Alors (w_n) converge vers ℓ :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell \\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \text{tel que } \forall\, n \geq n_0, u_n \leq w_n \leq v_n \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} w_n = \ell$$

Application IV.b.2 : Déterminer la limite des suites suivantes :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$$

Propriété IV.b.3 : Soient u et v deux suites réelles.

1)

$$\begin{cases} \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \text{tel que } \forall\, n \geq n_0, u_n \leq v_n \\ u_n \to +\infty \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$$

2)

$$\begin{cases} \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \text{tel que } \forall\, n \geq n_0, u_n \leq v_n \\ v_n \to -\infty \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

Application IV.b.4 : Déterminer la limite des suites suivantes :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad v_n = -n + \sin\left(n^2 - 3n + \sqrt{n^2+7}\right)$$

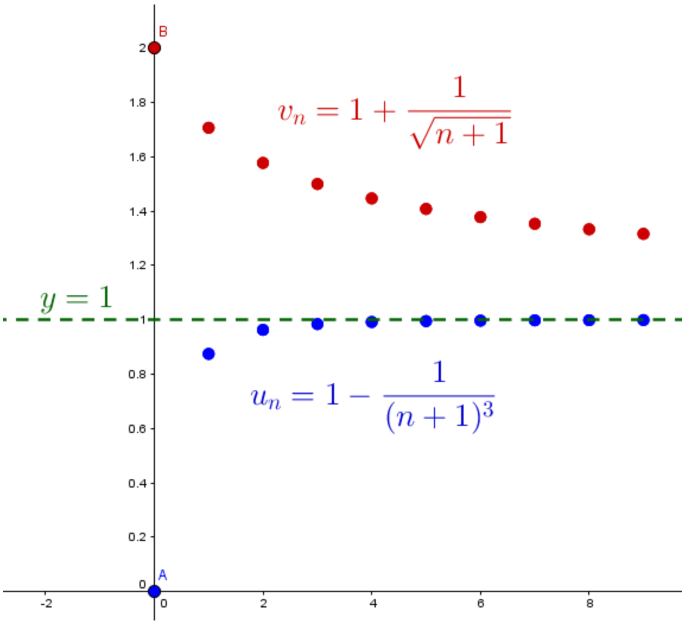
c) Suites adjacentes

Définition : On dit que deux suites u et v sont adjacentes si et seulement si :

- u est croissante
- v est décroissante
- $\lim(u_n - v_n) = 0$

Exemple IV.c.1 : Démontrer que les suites u et v sont adjacentes :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et } v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$$



Propriété IV.c.2 : Soient u et v deux suites adjacentes telles que u soit croissante et v décroissante. On a alors :
1) u et v converge vers la même limite ℓ
2) On a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ell \leq v_n$$

Application IV.c.3 : Démontrer que les suites u et v convergent avec :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et } v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$$

d) Suites extraites

Définition : On appelle suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (on dit encore sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$) toute suite de la forme $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\varphi :\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante.
φ s'appelle une extraction de $\mathbb{N}$.

Exemple : On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n$. Alors la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite stationnaire égale à 1 de même que $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ qui elle vaut -1.

Propriété IV.d.1 : Soit $\varphi :\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante. Alors on a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geq n$$

Propriété IV.d.2 : Si (u_n) converge, alors toute suite extraite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la même limite.

ATTENTION : On peut avoir une suite extraite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge sans avoir $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge.

Exemple IV.d.3 : Déterminer une suite qui admet une suite extraite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge telle que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Propriété IV.d.4 (suites divergentes) :
1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle qu'il existe une extraction φ telle que $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle qu'il existe deux extractions φ_1 et φ_2 telles que $\left(u_{\varphi_1(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_1 et $\left(u_{\varphi_2(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_2. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Application IV.d.5 : Démontrer la divergence des suites suivantes :

Propriété IV.d.6 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers la même limite ℓ.

Application IV.d.7 : Démontrer la convergence de :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$$