Chapitre 9 : Suites numériques
Partie C : Suites récurrentes et suites complexes

I) Suites récurrentes d'ordre 1

Dans toute cette partie I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et f : I ⟶ $\mathbb{R}$

a) Généralité

Définition : On dit qu'une suite est récurrence d'ordre 1 s'il existe une fonction f : I ⟶ $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, f(u_n) = u_{n+1}$$

Exemple I.a.1 : Donner deux exemples de suite récurrente d'ordre 1.

Remarque : On peut parfois ne pas définir correctement la suite, si à partir d'un certain rang un terme de la suite n'est plus dans l'ensemble de définition de la fonction.

Exemple I.a.2 : On pose :

$$u : \begin{cases} u_0 = 0{,}5 \\ u_{n+1} = 2 + \sqrt{1 - u_n} \end{cases}$$

Définition : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit que I est stable par f si et seulement si :

$$\forall\, x \in I, f(x) \in I \iff f(I) \subset I$$

Exemple I.a.3 : On pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{1}{2}x + 3 \end{cases}$$

Montrer que I = [2 ; 10] est stable par *f*.

Propriété I.a.4 : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $I \sqsubset \mathcal{D}_f$, stable par *f*. On pose la suite définie par :

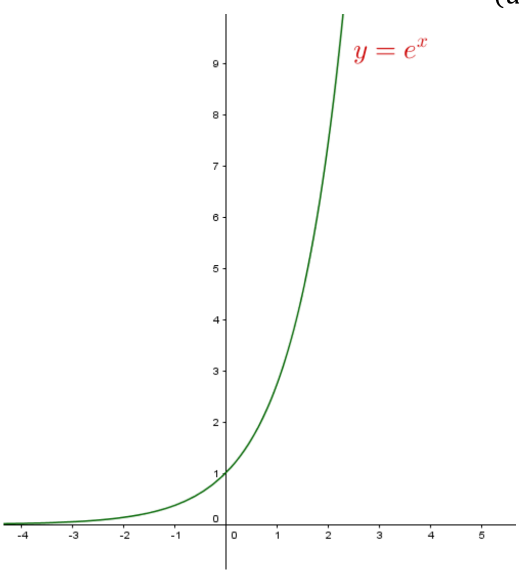
$$u : \begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

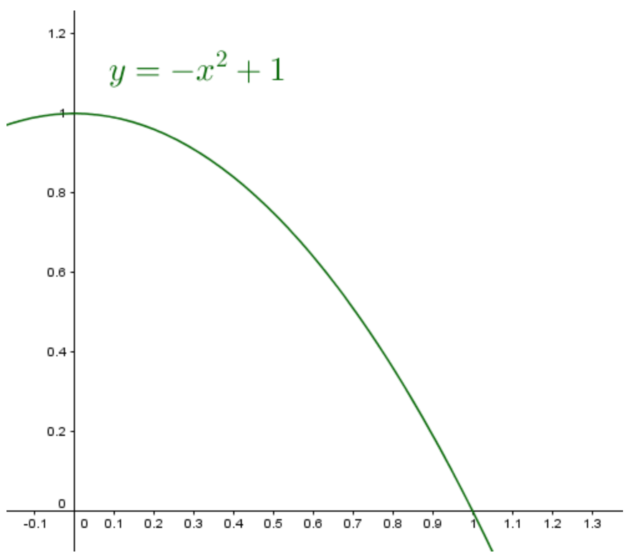
Alors u est définie sur $\mathbb{N}$.

b) Monotonie et convergence d'une suite récurrente d'ordre 1

Exemples de représentation I.b.4 : Déterminer graphiquement les premiers termes des suites suivantes :

$$u : \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = e^{u_n} \end{cases} \qquad v: \begin{cases} u_0 = 0{,}1 \\ u_{n+1} = -u_n^2 + 1 \end{cases}$$





Propriété I.b.2 : Soit f : I ⟶ ℝ et I stable par f. On pose :

$$u : \begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1er cas : Si *f* est croissante sur I alors (u_n) est monotone.
2ième cas : Si *f* est décroissante alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et de monotonie contraire.

Propriété I.b.3 (Théorème de la limite éventuelle) : Soit *f* : I ⟶ ℝ continue sur I et I stable par *f*. On pose :

$$u : \begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Si la suite u converge, alors elle converge vers un réel point fixe de *f* : $f(\ell) = \ell$

Application I.b.4 : Déterminer la convergence et la limite de la suite u définie par :

$$u : \begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} \end{cases}$$

c) Suites arithmétiques et géométriques

Définitions :

- Soit $r \in \mathbb{R}$. On appelle suite arithmétique de raison r toute suite définie par :

$$u : \begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$$

- Soit $q \in \mathbb{R}$. On appelle suite géométrique de raison q toute suite définie par :

$$u : \begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = q \times u_n \end{cases}$$

Propriété I.c.1 (Formule explicite) : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. On a alors :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$$

Soit (v_n) une suite géométrique de raison q. On a alors :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n = q^n \times u_0$$

Exemple I.c.2 : On pose :

$$u : \begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = u_n + 4 \end{cases} \qquad v : \begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ v_{n+1} = 3 \times v_n \end{cases}$$

Déterminer le 37ième terme de la suite.

Propriété I.c.3 (somme) : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. On a alors :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + \cdots + u_n = \frac{(n+1)}{2}(u_0 + u_n) = \frac{(n+1)}{2}(2u_0 + nr)$$

Soit (v_n) une suite géométrique de raison q≠1. On a alors :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + \cdots + u_n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Application I.c.4 : Une piste d´athlétisme mesure 400m de circonférence. Marc décide de courir 10km sur cette piste. Au final, il a mis 33 minutes et 45 secondes. On sait de plus qu´à cause de la fatigue, il court 2 secondes plus lentement à chaque tour.
Combien a t´il mis pour parcourir le premier tour ?

Application I.c.5 : Déterminer :

$$\lim \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k}$$

Application I.c.6 : Que vaut 0,9999999999999999……….

d) Suite arithmético-géométrique

Définition : Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On appelle suite arithmético-géométrique toute suite définie par :

$$u : \begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = a \times u_n + b \end{cases}$$

Exemple I.d.1 : On pose :

$$u : \begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = 2 \times u_n + 1 \end{cases}$$

Déterminer la monotonie de la suite u en fonction de la valeur de u_0.

Remarque : Si a = 1, la suite est arithmétique de raison b et si b = 0 la suite est géométrique de raison a.

Propriété I.d.2 : Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2, a \neq 1$ et $b \neq 0$. On pose la suite définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$$

Alors la suite (v_n) est géométrique de raison a.

Application I.d.3 : On pose :

$$u : \begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} \times u_n + 1 \end{cases}$$

a) Exprimer u_n en fonction de n.
b) Déterminer la limite de u_n
c) Déterminer en fonction de u_0 l'expression de :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Remarque : Soit u est une suite arithmétio-géométrique avec $a \neq 1$, si u converge alors u converge vers le réel :

$$\ell = \frac{b}{1-a}$$

II) Suites linéaires récurrentes d'ordre 2

a) Généralités

Définition : Soit $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. On appelle suite linéaire récurrente d'ordre 2 une suite de la forme :

$$u : \begin{cases} (u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n \end{cases}$$

Exemple II.a.1 (Suite de Fibonacci) : Déterminer les premiers termes de :

$$\begin{cases} (u_0, u_1) = (1,1) \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

b) Formule explicite

Définition (Equation caractéristique) : Soit u une suite linéaire récurrente d'ordre 2 :

$$u : \begin{cases} (u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n \end{cases}$$

On appelle équation caractéristique de u l'équation :

$$(E_q) : r^2 = ar + b$$

Propriété II.b.1 (Théorème de la formule explicite) : Soit u une suite linéaire récurrente d'ordre 2 d'équation caractéristique :

$$(E_q) : r^2 - ar - b = 0$$

- Si $\Delta > 0$:

$$\exists\,!\,(A, B) \in \mathbb{R}^2, \text{tel que } \forall\, n \in \mathbb{N}, u_n = A r_1^n + B r_2^n$$

Où r_1 et r_2 sont les deux solutions distinctes de (E_q).

- Si $\Delta=0$:

$$\exists!\ (A,B) \in \mathbb{R}^2, \text{tel que } \forall\ n\ \in \mathbb{N}, u_n = (An+B)r^n$$

Où r est l'unique solution de (E_q).

- Si $\Delta<0$:

$$\exists!\ (A,B) \in \mathbb{R}^2, \text{tel que } \forall\ n\ \in \mathbb{N}, u_n = (A\cos(n\theta)+B\sin(n\theta))\rho^n$$

Où $z = \rho e^{i\theta}$ une des deux solutions complexes de (E_q).

Exemple II.b.2 : Déterminer les expressions explicites des trois suites suivantes :

$$u: \begin{cases} (u_0, u_1) = (1,1) \\ \forall\ n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{2}{3}u_{n+1} + \frac{1}{3}u_n \end{cases} \quad v: \begin{cases} (v_0, v_1) = (1,1) \\ \forall\ n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = 4v_{n+1} - 4v_n \end{cases} \quad w: \begin{cases} (u_0, u_1) = (1,1) \\ \forall\ n \in \mathbb{N}, w_{n+2} = w_{n+1} - w_n \end{cases}$$

III) Les suites complexes

a) Généralités

Définition : Soit $(z_n)_n : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ une suite complexe $\left((z_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)$. On a alors :

$$\forall\ n\ \in \mathbb{N}, z_n = x_n + iy_n$$

On a : $(x_n)_n$ et $(y_n)_n \in \left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)^2$ la partie réelle et la partie imaginaire de la suite $(z_n)_n$.

Exemple III.a.1 : Expliciter : $z_0 = 1 + i$ et $\forall\ n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = i \times z_n$

b) Suites bornées et convergentes

Définition : Soit $(z_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que la suite $(z_n)_n$ est bornée si et seulement si $(|z_n|)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Exemple III.b.1 : On pose la suite définie par :

$$\begin{cases} z_0 = 1 + i \\ \forall\ n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = i \times z_n \end{cases}$$

Montrer que cette suite est bornée.

Propriété III.b.2 : la suite $(z_n)_n$ est bornée si et seulement si les suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n \in \left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)^2$ partie réelle et partie imaginaire de la suite $(z_n)_n$ sont bornées.

Définition : Soit $(z_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que la suite $(z_n)_n$ est convergente vers un complexe a si et seulement si

$$\lim|z_n - a| = 0$$

Exemple : Etudier la convergence de la suite définie par :

$$\begin{cases} z_0 = 1 + i \\ z_{n+1} = \frac{i}{2}z_n + 1 \end{cases}$$

Remarque : Les propriétés de convergence des suites complexes conservent les propriétés des suites réelles :

- Opérations sur les limites
- Toute suite qui converge est bornée
- $\lim q^n = 0 \iff q \in \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$

Application III.b.3 : Déterminer :

$$\lim \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{i}{2}\right)^k$$

On a juste les deux propriétés suivantes :

Propriété III.b.4 : Soit $(z_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite convergente vers a. On a alors $(\overline{z_n})_n$ convergente vers $\bar{a}$.

Propriété III.b.5 : Soit $(z_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite convergente vers a. Alors les suites $(x_n)_n$ *et* $(y_n)_n \in \left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)^2$ partie réelle et partie imaginaire de la suite $(z_n)_n$ sont convergentes respectivement vers $\mathrm{Re}(a)$ et $\mathrm{Im}(z)$.

Application III.b.6 : Déterminer :

$$\lim \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx)}{2^k}$$

c) Comparatif réelle ou complexe

On a répertorié dans le tableau ci-dessous ce que l'on conserve ou non entre les suites réelles et complexes :

	Suites réelles	Suites complexes
Suite bornée		
Minorant ou minorant		
Sens de variation		
Suites convergente et divergente		
Suites géométriques/arithmétiques		
Suites récurrences		
Opérations sur les limites		

Remarque (suite linéaire récurrente complexe d'ordre 2) : Soit u une suite linéaire récurrente complexe d'ordre 2 d'équation caractéristique :

$$(E_q) : r^2 - ar - b = 0$$

- Si $\Delta \neq 0$:

$$\exists\,!\,(A,B) \in \mathbb{C}^2, \text{tel que } \forall\, n \in \mathbb{N}, u_n = Ar_1^n + Br_2^n$$

Où r_1 et r_2 sont les deux solutions distinctes de (E_q).

- Si $\Delta = 0$:

$$\exists!\ (A,B) \in \mathbb{C}^2, \text{tel que } \forall\, n \in \mathbb{N}, u_n = (An + B)r^n$$

Où r est l'unique solution de (E_q).

Application III.c.1 : 1) Donner l'expression du terme général de la suite récurrente complexe $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$u_0 = 0, u_1 = 1 + 4i \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = (3 - 2i)u_{n+1} - (5 - 5i)u_n$$

2) Soit $\theta \in]0;\pi[$. Déterminer le terme général de la suite réelle (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 = u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - 2\cos(\theta)\, u_{n+1} + u_n = 0$$