TD 9 : Suites numériques

Partie A : Ensemble usuel de nombres

Exercice A1 : Déterminer les bornes supérieures et inférieures des ensembles suivants :

$$A = \left\{\frac{n+5}{n+1} ; n \in \mathbb{N}\right\} ; B = \left\{\frac{1}{n} + (-1)^n ; n \in \mathbb{N}^*\right\} \quad C = \{\sqrt{x} - \lfloor x \rfloor ;\ x \in \mathbb{N}\}$$

Exercice A2 : Montrer les égalités suivantes :

$$]-1;1[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[-1 + \frac{1}{n} ; 1 - \frac{1}{n}\right] \ et\ [-1;1] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left]-1 - \frac{1}{n} ; 1 + \frac{1}{n}\right[$$

Exercice A3 : Déterminer les ensembles :

$$I = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[-1 ; \frac{1}{n}\right] ; J = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n} ; \frac{1}{n}\right[; K = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n+1[$$

Exercice A4 : Soient A et B deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$.

a) Montrer que :

$$A \subset B \Longrightarrow \sup A \leq \sup B$$

b) Montrer que $A \cup B$ admet une borne supérieur et déterminer $\sup(A \cup B)$

c) Montrer que $A \cap B$ est majorée. Peut-on déterminer $\sup(A \cap B)$?

Exercice A5 : Montrer que :

$$\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y \Longrightarrow \lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$$
$$\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2, \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$$

Exercice A6 : Montrer que :

$$\forall\ x \in [0; +\infty[, \lfloor x \rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor$$

Partie B : Suites numériques – Monotonie et définition

Exercice B1 : Ecrire les suites qui correspondent aux programmes Python suivant :

```python
def masuite(n):
    a=[2]
    for i in range(1,n+1):
        a.append(3*a[i-1]+2)
    return a
```

```python
def masuite(n):
    a=[1,1]
    for i in range(2,n+1):
        a.append(a[i-2]+a[i-1])
    return a
```

Exercice B2 : Déterminer le sens de variation des suites suivantes :

$$u : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \mapsto \dfrac{n!}{e^n} \end{cases} \qquad v : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k} \end{cases}$$

Partie C : Limite d'une suite

Exercice C1 : Déterminer les limites des suites suivantes, avec $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$ et $n \neq 1$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$1)\ u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \quad 2)\ u_n = \frac{n^3 + 5n}{5n^3 + \cos(n) + \frac{1}{n^2}} \quad 3)\ u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}, (a,b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$$

$$4)\ u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\lfloor kx\rfloor \quad 5)\ u_n = \sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \quad 6)\ u_n = \sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$$

$$7)\ u_n = \sqrt[n]{2+(-1)^2} \quad 8)\ u_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \quad 9)\ u_n = (\ln(n))^{\frac{1}{n}} \quad 10)\ u_n = \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{\ln(n)}}$$

Exercice C2 :

1) Montrer que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, |\sin(x) - x| \leq \frac{x^2}{2}$$

2) En déduire :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$$

Exercice C3 (moyenne de Cesaro) : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On pose pour tout

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}u_k = \frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}$$

1) Montrer que si (u_n) est monotone, alors la suite (v_n) est monotone et de même sens que (u_n).

2) a) Montrer que si (u_n) converge vers 0, (v_n) aussi. Que pensez-vous de la réciproque ?

b) Montrer que si (u_n) converge vers$\ell \in \mathbb{R}$, (v_n) aussi.

c) Montrer que si $\lim_n (w_{n+1} - w_n) = 0$, alors $\lim_n \frac{w_n}{n} = 0$. Donner un exemple d'une telle suie qui ne soit pas convergente.

Exercice C4 : Ecrire à l'aide des quantificateurs les propriétés suivantes :

1) La suite u ne converge par vers le réel ℓ
2) La suite u ne diverge pas vers $+\infty$
3) La suite u diverge

Exercice C5 (règle de d'Alembert) : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

On suppose que v converge vers une limite ℓ. Montrer que :

1) Si $\ell<1$, u converge vers 0

2) Si $\ell>1$, u diverge vers $+\infty$

3) Que dire quand $\ell = 1$?

Exercice C6 : Montrer que la suite suivante converge :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$$

Partie D : Convergence des suites implicites

Exercice D.1 : On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \left]n\pi - \frac{\pi}{2};\ n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$$

On pose de plus l'équation :

$$(E): \tan(x) = x$$

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'équation (E) admet une unique solution x_n dans I_n
2) Déterminer la limite de x_n
3) Montrer que :

$$\frac{1}{n\pi}x_n \to 1$$

4) Montrer qu'il existe (x_n) qui converge vers 0 telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + v_n$$

Exercice D.2 : a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $x^3 + nx = 1$ admet une unique solution réelle. On note u_n cette solution.
b) Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.
c) En déduire qu'elle converge et calculer sa limite.

Exercice D.3 : a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $x + x^2 + \cdots + x^n = 1$ admet une unique solution réelle dans l'intervalle $[0; +\infty[$. On note x_n cette solution.
b) Montrer que la suite (x_n) est monotone, puis convergente et calculer sa limite.

Partie E : Suites adjacentes

Exercice E.1 (La suite arithmético-géométrique) : Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. On pose :

$$\begin{cases} (u_0, v_0) = (a, b) \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

1) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < u_n < v_n$$

2) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n - u_n \leq \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$$

3) Montrer que u et v sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

Exercice E.2 : On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \quad u_n = H_n - \ln(n) \quad \text{et } v_n = H_n - \ln(n+1)$$

1) a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$$

b) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
c) En déduire l'existence de $\gamma \in \mathbb{R}$ et d'une suite (w_n) qui converge vers 0 tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + w_n \text{ (γ est appelée la constante d'Euler)}$$

d) Quelle est la limite de H_n en $+\infty$?
e) Déterminer la limite de :

$$R_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$$

Partie F : Suites extraites

Exercice F.1 : Etudier la convergence de :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Exercice F.2 : Etudier la convergence de :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \frac{1}{n}$$

Exercice F.3 : Soit u une suite réelle monotone admettant une sous-suite convergente. Montrer que la suite u converge.

Partie G : Suites récurrentes d'ordre 1

Exercice G.1 : On considère la suite définie $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$
a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \in [0; 3]$:

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$$

b) En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice G2 : Etudier les suites définies par :

a) $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n)$ b) $u_0 = 1/2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{3}(4 - u_n)$
c) $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$ et $u_0 = 1$ d) $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(1 + 2u_n)$ et $u_0 \in \mathbb{R}$

Exercice G3 : Soit f la fonction définie sur [0; 1] par :

$$f : \mapsto \frac{x^2}{2 - x^2}$$

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in [0; 1[$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2 - u_n^2}$$

1) Montrer que pour tout $x \in [0; 1[$, $0 \leq f(x) \leq x \leq 1$.
2) En déduire que $0 \leq u_n < 1$ puis que (u_n) est décroissante.
3) La suite (u_n) a-t-elle une limite et si oui laquelle ?

Exercice G.4 : On pose :

$$u : \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 \end{cases}$$

1) Représenter les premiers termes de la suite et conjecturer son sens de variation et sa limite.
2) Ecrire un programme Python qui vous affiche la courbe obtenue en 1.
3) Exprimer u_n en fonction de n puis en déduire la limite de u_n.
4) Déterminer une formule explicite de :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

5) Même questions pour la suite définie par :

$$u : \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -u_n + 4 \end{cases}$$

Exercice G5 :Soit u la suite définie par récurrence par :

$$u : \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) \end{cases}$$

1) Montrer que u_n existe et $u_n \geq \sqrt{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leq \frac{\left|u_n - \sqrt{2}\right|^2}{2}$$

3) a) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left|u_n - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2^{2^n-1}}$$

b) Donner la limite de (u_n).

4) Combien de termes de la suite faut-il calculer pour avoir une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-100} près ?

Exercice G.6 : Soient $x > 1$, (u_n) et (v_n) définies par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 = x\,; v_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n + v_n) \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \end{cases}$$

1) Montrer que (u_n) et (v_n) sont bien définies et à termes strictement positifs.

2) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq v_n$$

3) Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.

4) Montrer que la suite $(u_n v_n)$ est constante. En déduire la valeur de la limite commune à (u_n) et (v_n).

Exercice G.7 : Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n) \end{cases}$$

De plus on pose la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g: x \mapsto \sin(x) - x$.

1) Etudier g sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

2) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, -1 \leq u_n \leq 1$$

3) On suppose que $0 \leq u_1 \leq 1$

a) Montrer que pour tout $n \geq 1, 0 \leq u_n \leq 1$.

b) En déduire que pour tout $n \geq 1, u_{n+1} \leq u_n$.

c) En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

4) On suppose que $-1 \leq u_1 \leq 0$. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Partie H : Suites linéaires récurrentes d'ordre 2

Exercice H.1 : Donner le terme général et étudier la convergence des suites définies par $(u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2$ et :

$$\text{a) } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \quad \text{b) } u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n \quad u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n)$$

Exercice H.2 : Soit $(u_0; v_0) \in \mathbb{R}^2$. On pose :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{2u_n + v_n}{3} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases}$$

1) Explicitez u_n et v_n en fonction de n.

2) En déduire les limites des suites u et v.

Partie I : Suites complexes

Exercice I.1 : Etudier la convergence des suites complexes suivantes :

1) Pour tout entier naturel n, $z_n = x_n + iy_n$ avec $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n - y_n) \\ y_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n) \end{cases}$$

2) Pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = \frac{i}{2} z_n + 1$.

Exercice I.2 : On considère la suite complexe (z_n) définie par :

$$\begin{cases} z_0 = re^{i\theta} (-\pi < \theta \leq \pi) \\ \forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{2} \end{cases}$$

On désigne par r_n le module de z_n et par θ_n l'argument de z_n tel que $-\pi < \theta \leq \pi$.
1) Effectuer la construction géométrique de z_{n+1} à partir de z_n.
2) a) Exprimer r_{n+1} en θ_{n+1} en fonction de r_n et de θ_n.
b) En déduire la valeur de $\lim\limits_{n} \theta_n$.
3) a) Etudier la suite définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n = r_n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$$

b) En déduire la limite de r_n puis celle de z_n.

Exercice I.3 : 1) Donner l'expression du terme général de la suite récurrente complexe (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 + 4i \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = (3 - 2i)u_{n+1} - (5 - 5i)u_n \end{cases}$$

2) Soit $\theta \in]0; \pi[$. Déterminer le terme général de la suite réelle (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 = \ u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - 2\cos(\theta)\, u_{n+1} + u_n = 0$$