Correction TD 8 : Calcul de primitives

Partie A : Calculs classiques de primitives et intégrale

Exercice A.1 : Déterminer les primitives des fonctions suivantes en précisant leur domaine de validité

$$f_1 : x \longmapsto x^3+5x^2-3x+1;\ \ f_2 : x \longmapsto \cos(3x)\ \ ; f_3(x)=e^{-5x}\ ; f_4(x)=\frac{1}{x+2};\ f_5 : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$f_6 : x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}\ f_7 : x \longmapsto \frac{1}{x^4};\ \ f_8 : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}}\ \ ; f_9(x)=\sqrt{x}\ ; f_{10}(x)=x\sqrt{x};$$

$f_1 : x \longmapsto x^3+5x^2-3x+1$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive définie sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\{F_1 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}), F_1'=f_1\} = \left\{x \longmapsto \frac{x^4}{4}+\frac{5x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+x+c, c \in \mathbb{R}\right\}$$

$f_2 : x \longmapsto \cos(3x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive définie sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\{F_2 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}), F_2'=f_2\} = \left\{x \longmapsto \frac{1}{3}\sin(3x)+c, c \in \mathbb{R}\right\}$$

$f_3 : x \longmapsto e^{-5x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive définie sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\{F_3 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}), F_3'=f_3\} = \left\{x \longmapsto -\frac{1}{5}e^{-5x}+c, c \in \mathbb{R}\right\}$$

$f_4 : x \longmapsto \frac{1}{x+2}$ est continue sur $]-\infty;-2[$ et sur $]-2;+\infty[$ donc admet une primitive définie sur chacun de ses deux intervalles. On a :

$$\{F_4 \in \mathcal{C}^0(]-\infty;-2[,\mathbb{R}), F_4'=f_4\} = \{x \longmapsto \ln(-x-2)+c, c \in \mathbb{R}\}$$

De même on a :

$$\{F_4 \in \mathcal{C}^0(]-2;+\infty[,\mathbb{R}), F_4'=f_4\} = \{x \longmapsto \ln(x+2)+c, c \in \mathbb{R}\}$$

$f_5 : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est continue sur $]-1;1[$ donc admet une promitive sur $]-1;1[$ mais en fait sur $[-1;1]$ car on connait une primitive classique de f_5 :

$$\{F_5 \in \mathcal{C}^0([-1;1],\mathbb{R}), F_5'=f_5\} = \{x \longmapsto \arcsin(x)+c, c \in \mathbb{R}\}$$

$f_6 : x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive définie sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\{F_6 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}), F_6'=f_6\} = \{x \longmapsto \arctan(x)+c, c \in \mathbb{R}\}$$

$f_7 : x \longmapsto \frac{1}{x^4}$ est continue sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ donc admet une primitive définie sur chacun de ses deux intervalles. On a :

$$\{F_7 \in \mathcal{C}^0(]-\infty;0[,\mathbb{R}), F_7'=f_7\} = \left\{x \longmapsto -\frac{1}{3x^3}+c, c \in \mathbb{R}\right\}$$

De même on a :

$$\{F_7 \in \mathcal{C}^0(]0;+\infty[,\mathbb{R}), F_7'=f_7\} = \left\{x \longmapsto -\frac{1}{3x^3}+c, c \in \mathbb{R}\right\}$$

Remarque : On a :

$$\forall x \neq 0, f(x)=\frac{1}{x^4}=x^{-4} \Longrightarrow F(x)=\frac{x^{-3}}{-3}=-\frac{1}{3x^3}$$

$f_8 : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est continue sur $]0;+\infty[$ donc admet une primitive définie sur $]0;+\infty[$ que l'on peut prolonger sur $[0;\infty[$. On a :

De même on a :

$$\{F_8 \in \mathcal{C}^0([0;+\infty[,\mathbb{R}), F_8' = f_8\} = \{x \longmapsto 2\sqrt{x} + c, c \in \mathbb{R}\}$$

Remarque : On a :

$$\forall x > 0, f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}} \Longrightarrow F(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x}$$

$f_9 : x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0;+\infty[$ donc admet une primitive définie sur $[0;+\infty[$. De plus on sait que :

$$\forall x \geq 0, f_9(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Longleftarrow F_9(x) = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$$

On a alors :

$$\{F_9 \in \mathcal{C}^0([0;+\infty[,\mathbb{R}), F_9' = f_9\} = \left\{x \longmapsto \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c, c \in \mathbb{R}\right\}$$

$f_{10} : x \mapsto x\sqrt{x}$ est continue sur $[0;+\infty[$ donc admet une primitive définie sur $[0;+\infty[$. De plus on sait que :

$$\forall x \geq 0, f_{10}(x) = x\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}} \Longleftarrow F_{10}(x) = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x}$$

On a alors :

$$\{F_{10} \in \mathcal{C}^0([0;+\infty[,\mathbb{R}), F_{10}' = f_{10}\} = \left\{x \longmapsto \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + c, c \in \mathbb{R}\right\}$$

Exercice A.2 : Déterminer les primitives des fonctions suivantes en précisant leur domaine de validité

$$f_1 : x \longmapsto \frac{x}{1+x^2}; \quad f_2 : x \longmapsto \frac{x}{1+x^4} \quad ; f_3(x) = \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)} \quad ; f_4(x) = \frac{1}{x\ln(x)}; \quad f_5 : x \longmapsto \cos^4(x);$$

$$f_6 : x \longmapsto \cos(x)\sin^4(x) \qquad f_7 : x \longmapsto \cos^3(x)\sin^4(x) \qquad f_8 : x \longmapsto \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}$$

$f_1 : x \longmapsto \frac{x}{1+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive définie sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = \frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{1+x^2} = \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)}, \text{avec } u(x) = 1 + x^2$$

On a donc :

$$\{F_1 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}), F_1' = f_1\} = \left\{x \longmapsto \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c, c \in \mathbb{R}\right\}$$

$f_2 : x \longmapsto \frac{x}{1+x^4}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive définie sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_2(x) = \frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{1+(x^2)^2} = \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}, \text{avec } u(x) = x^2$$

On a donc :

$$\{F_2 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}), F_2' = f_2\} = \left\{x \longmapsto \frac{1}{2}\arctan(x^2) + c, c \in \mathbb{R}\right\}$$

$f_3 : x \longmapsto \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive définie sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_2(x) = \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)} = -\frac{-\sin(x)}{1+(\cos(x))^2} = -\frac{u'(x)}{1+u^2(x)}, \text{avec } u(x) = \cos(x)$$

On en déduit donc que :

$$\{F_3 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}), F_3' = f_3\} = \{x \longmapsto -\arctan(\cos(x)) + c, c \in \mathbb{R}\}$$

$f_4: x \longmapsto \frac{1}{x\ln(x)}$ est définie et continue sur $]0;1[$ et $]1;+\infty[$ donc admet une primitive définie sur chacun de ses deux intervalles. On a :

$$\forall x>0, x\neq 1, \frac{1}{x\ln(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)} \text{ avec } u(x)=\ln(x)$$

$$\{F_4 \in \mathcal{C}^0(]0;1[,\mathbb{R}), F_4' = f_4\} = \{x \longmapsto \ln(-\ln(x)) + c, c\in\mathbb{R}\}$$

De même on a :

$$\{F_4 \in \mathcal{C}^0(]1;+\infty[,\mathbb{R}), F_4' = f_4\} = \{x \longmapsto \ln(\ln(x)) + c, c\in\mathbb{R}\}$$

$f_5: x \longmapsto \cos^4(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive définie sur $\mathbb{R}$. De plus on a :

$$\forall x\in\mathbb{R}, f_5(x) = \cos^4(x) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4 = \frac{e^{4ix}+4e^{2ix}+6+4e^{-2ix}+e^{-4ix}}{16} = \frac{1}{8}\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}$$

On en déduit donc que :

$$\int \cos^4(x)\,dx = \frac{1}{8}\int\cos(4x)\,dx + \frac{1}{2}\int\cos(2x)\,dx + \frac{3}{8}\int 1dx = \frac{\sin(4x)}{32} + \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{3}{8}x$$

On a donc :

$$\{F_5 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}), F_5' = f_5\} = \left\{x \longmapsto \frac{\sin(4x)}{32} + \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{3}{8}x + c, c\in\mathbb{R}\right\}$$

$f_6: x \longmapsto \cos(x)\sin^4(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive définie sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\forall x\in\mathbb{R}, f_6(x) = \cos(x)\sin^4(x) = u'(x)u^4(x) \text{ avec } u(x)=\sin(x)$$

On en déduit donc que :

$$\{F_6 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}), F_6' = f_6\} = \left\{x \longmapsto \frac{\sin^5(x)}{5} + c, c\in\mathbb{R}\right\}$$

$f_7: x \longmapsto \cos^3(x)\sin^4(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive définie sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}, f_7(x) &= \cos^3(x)\sin^4(x)\\ &= \cos(x)\cos^2(x)\sin^4(x)\\ &= \cos(x)\left(1-\sin^2(x)\right)\sin^4(x)\\ &= \cos(x)\sin^4(x) - \cos(x)\sin^6(x)\end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\{F_7 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}), F_7' = f_7\} = \left\{x \longmapsto \frac{\sin^5(x)}{5} - \frac{\sin^7(x)}{5} + c, c\in\mathbb{R}\right\}$$

Astuce à retenir :
Si vous avez à déterminer une primitive d'une fonction du type $f: x \mapsto \sin^p(x)\cos^q(x)$, il y a seulement un cas difficile, quand p et q sont pairs.
En effet imaginons que p soit impair :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}, f(x) = \sin^p(x)\cos^q(x) &= \sin^{2p'+1}(x)\cos^q(x)\\ &= \sin(x)\left(\sin^2(x)\right)^{p'}\cos^q(x)\\ &= \sin(x)\left(1-\cos^2(x)\right)^{p'}\cos^q(x)\\ &= \sin(x)\left(\sum_{k=0}^{p'}\binom{p'}{k}(-1)^k\cos^{2k}(x)\right)\cos^q(x)\\ &= \sum_{k=0}^{p'}\binom{p'}{k}(-1)^k\sin(x)\cos^{2k+q}(x)\end{aligned}$$

Ainsi une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \sum_{k=0}^{p'} \binom{p'}{k} (-1)^{k+1} \frac{\cos^{2k+q+1}(x)}{2k+q+1}$$

C'est exactement ce que j'ai fait pour le f_7.
Bien sûr on a la même chose si q est impair !

Par contre si l'on a deux puissances pairs, cela devient plus compliqué et il faut linéariser.

$f_8 : x \longmapsto \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}$ est continue sur$\mathbb{R}$ donc admet une primitive définie sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_8(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}} = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} \text{ avec } u(x) = 1 + e^x$$

On en déduit donc que :

$$\{F_8 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), F_8' = f_8\} = \{x \longmapsto 2\sqrt{1+e^x} + c, c \in \mathbb{R}\}$$

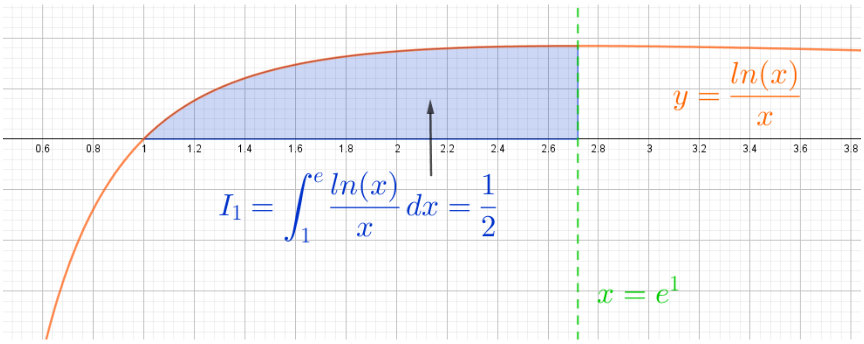
Exercice A.3 : Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x} dx, \quad I_2 = \int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^3} dx$$

On a :

$$I_1 = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x} dx = \int_1^e \frac{1}{x} \ln(x)\, dx = \underbrace{\int_1^e u'(x)u(x) dx}_{\text{(avec } u(x)=\ln(x))} = \left[\frac{\ln^2(x)}{2}\right]_1^e = \frac{1}{2}$$

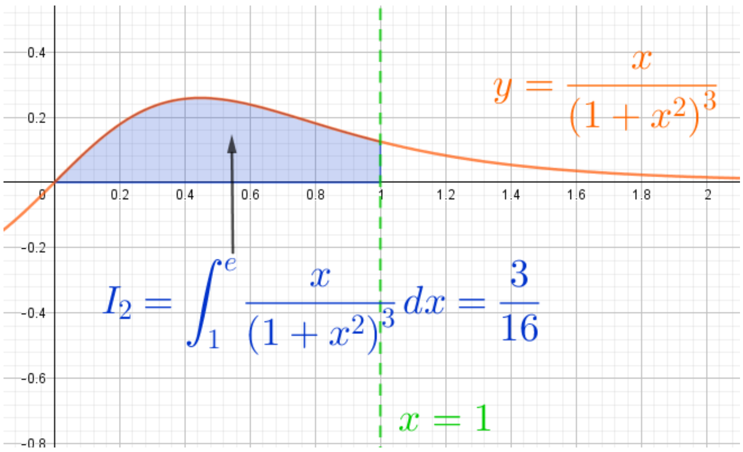
Remarque : On peut observer ce résultat sur une courbe :



De même on a :

$$I_2 = \int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^3} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{(x^2+1)^3} dx = \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^1 \frac{u'(x)}{(u(x))^3} dx}_{\text{(avec } u(x)=1+x^2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{-1}{2u(x)^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} - 1\right) = \frac{3}{16}$$

Remarque : On peut observer ce résultat sur une courbe :



Exercice A.4 : On cherche à calculer de deux façons différentes l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^1 e^{-2x}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx$$

1) a) On pose la fonction :

$$g_{a,b} : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \left(a\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + b\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)e^{-2x} \end{cases}$$

Déterminer les valeurs de a et b pour que $g_{a,b}$ soit une primitive de $x \longmapsto e^{-2x}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

b) En déduire la valeur de I.

2) En utilisant les complexes, déterminer une primitive de $x \longmapsto e^{-2x}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ puis retrouvez I.

1) a) On pose :

$$g_{a,b} : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \left(a\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + b\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)e^{-2x} \end{cases}$$

On sait que $g_{a,b} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'_{a,b}(x) = \left(-\frac{a\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{\pi}{2}b\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)e^{-2x} + \left(-2a\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 2b\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)e^{-2x}$$

$$= \left(\left(-\frac{a\pi}{2} - 2b\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \left(\frac{\pi}{2}b - 2a\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)e^{-2x}$$

$$= e^{-2x}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

En identifiant on a :

$$\begin{cases} \frac{a\pi}{2} + 2b = 0 \\ \frac{\pi}{2}b - 2a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{4b}{\pi} \\ \frac{\pi}{2}b + \frac{8b}{\pi} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{8}{\pi^2+16} \\ b = \frac{2\pi}{\pi^2+16} \end{cases}$$

On en déduit donc que

$$g_{-\frac{8}{\pi^2+16},\frac{2\pi}{\pi^2+16}} : x \mapsto \left(-\frac{8}{\pi^2+16}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{2\pi}{\pi^2+16}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)e^{-2x}$$

Est une primitive de $x \mapsto e^{-2x}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

b) On a alors :

$$I = \int_0^1 e^{-2x}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx = \left[\left(-\frac{8}{\pi^2+16}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{2\pi}{\pi^2+16}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)e^{-2x}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{\pi^2+16}e^{-2} + \frac{8}{\pi^2+16}$$

2) On peut écrire que :

$$e^{-2x}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) = \mathcal{Re}\left(e^{-2x+\frac{i\pi}{2}x}\right)$$

On en déduit donc d'après les propriétés de dérivation des fonctions d'une variable réelle à valeur complexe :

$$I = \int_0^1 e^{-2x}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx = \int_0^1 \mathcal{Re}\left(e^{-2x+\frac{i\pi}{2}x}\right)dx = \mathcal{Re}\left(\int_0^1 e^{-2x+\frac{i\pi}{2}x}dx\right) = \mathcal{Re}\left(\left[\frac{1}{\frac{\pi}{2}i - 2}e^{-2x+\frac{i\pi}{2}x}\right]_0^1\right)$$

De plus on a :

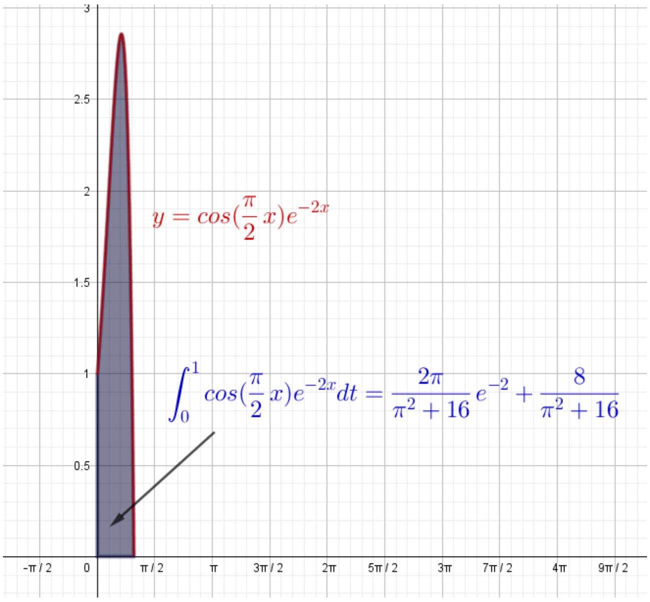
$$\mathcal{Re}\left(\left[\frac{1}{\frac{\pi}{2}i-2}e^{-2x+\frac{i\pi}{2}x}\right]_0^1\right) = \mathcal{Re}\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}i-2}\left(e^{-2+\frac{i\pi}{2}} - 1\right)\right) = \mathcal{Re}\left(-\frac{\left(\frac{\pi}{2}i+2\right)}{\frac{\pi^2}{4}+4}\left(e^{-2}i - 1\right)\right) = -4\frac{-\frac{\pi}{2}e^{-2} - 2}{\pi^2+16}$$

$$= \frac{2\pi}{\pi^2+16}e^{-2} + \frac{8}{\pi^2+16}$$

On en déduit donc que :

$$I = \int_0^1 e^{-2x} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = \frac{2\pi}{\pi^2 + 16} e^{-2} + \frac{8}{\pi^2 + 16}$$

On a alors la courbe suivante :



Partie B : Changement de variable et intégration par partie

Exercice B.1 : Déterminer les primitives des fonctions suivantes en précisant leur domaine de validité

$f_1 : x \longmapsto xe^{3x}$; $f_2 : x \longmapsto (x+3)\cos(3x)$; $f_3(x) = \arcsin(x)$; $f_4(x) = x\arctan(x)$; $f_5 : x \longmapsto x^2\cos(x)$;

$f_1 : x \longmapsto xe^{3x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive définie sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\int xe^{3x}dx = \int u'(x)v(x)dx \text{ avec } \begin{cases} u'(x) = e^{3x} \\ v(x) = x \end{cases}$$

On en déduit donc, à l'aide d'une intégration par partie, avec :

$$\begin{cases} u(x) = \frac{1}{3}e^{3x} \\ v'(x) = 1 \end{cases}$$

$$\int xe^{3x}dx = \left[\frac{1}{3}e^{3x}x\right] - \int \frac{1}{3}e^{3x}dx = e^{3x}\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}\right)$$

On en déduit donc que

$$\{F_1 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}), F_1' = f_1\} = \left\{x \longmapsto e^{3x}\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}\right) + c, c \in \mathbb{R}\right\}$$

Remarque : On peut aussi faire cet exercice par « intuition » !

On pose $g : x \mapsto (ax+b)e^{3x}$

g est une primitive de f_1 si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = f_1(x) = xe^{3x}$$

De plus on sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = (3ax + a + 3b)e^{3x} = xe^{3x}$$

On identifie :

$$\begin{cases} 3a = 1 \\ a + 3b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{1}{9} \end{cases}$$

On en déduit donc que les primitives de $x \mapsto xe^{3x}$ sont de la forme :

$$x \mapsto e^{3x}\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}\right) + c, c \in \mathbb{R}$$

$f_2 : x \longmapsto (x+3)\cos(3x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive définie sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\int (x+3)\cos(3x)\,dx = \int u'(x)v(x)dx \text{ avec } \begin{cases} u'(x) = \cos(3x) \\ v(x) = x+3 \end{cases}$$

On en déduit donc, à l'aide d'une intégration par partie, avec :

$$\begin{cases} u(x) = \dfrac{1}{3}\sin(3x) \\ v'(x) = 1 \end{cases}$$

$$\int (x+3)\cos(3x)\,dx = \left[\frac{1}{3}\sin(3x)\,(x+3)\right] - \int \frac{1}{3}\sin(3x)\,dx = \frac{1}{3}\sin(3x)\,(x+3) + \frac{1}{9}\cos(3x)$$

On en déduit donc que

$$\{F_1 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}), F_1' = f_1\} = \left\{x \longmapsto \frac{1}{3}\sin(3x)\,(x+3) + \frac{1}{9}\cos(3x) + c, c \in \mathbb{R}\right\}$$

Remarque : On peut aussi faire cet exercice par « intuition » !

On pose $g : x \mapsto \cos(3x)\,(Ax+B) + \sin(3x)\,(Cx+D)$

g est une primitive de f_1 si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = f_1(x) = (x+3)\cos(3x)$$

De plus on sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \cos(3x)\,(A + 3Cx + 3D) + \sin(3x)\,(-3Ax - 3B + C)$$

On identifie :

$$\begin{cases} 3C = 1 \\ 3D + A = 3 \\ -3A = 0 \\ -3B + C = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} C = \dfrac{1}{3} \\ D = 1 \\ A = 0 \\ B = \dfrac{1}{9} \end{cases}$$

On en déduit donc qu'une primitive de $x \mapsto (x+3)\cos(3x)$ est :

$$g : x \mapsto \frac{1}{9}\cos(3x) + \sin(3x)\left(\frac{1}{3}x + 1\right)$$

On en déduit donc que g est une primitive de $x \mapsto (x+3)\cos(3x)$ si et seulement si :

$$x \mapsto \frac{1}{9}\cos(3x) + \sin(3x)\left(\frac{1}{3}x + 1\right) + c, c \in \mathbb{R}$$

$f_3 : x \longmapsto \arcsin(x)$ est continue sur $[-1;1]$ donc admet une primitive définie sur $[-1;1]$. On a :

$$\int \arcsin(x)\,dx = \int u'(x)v(x)dx \text{ avec } \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \arcsin(x) \end{cases}$$

On en déduit donc, à l'aide d'une intégration par partie, avec :

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases}$$

$$\int \arcsin(x)\,dx = [x\arcsin(x)] - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$$

On en déduit donc que

$$\{F_3 \in \mathcal{C}^0([-1;1],\mathbb{R}), F_3' = f_3\} = \left\{x \longmapsto x \times \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + c, c \in \mathbb{R}\right\}$$

$f_4 : x \longmapsto x\arctan(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive définie sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\int x\arctan(x)dx = \int u'(x)v(x)dx \text{ avec } \begin{cases} u'(x) = x \\ v(x) = \arctan(x) \end{cases}$$

On en déduit donc, à l'aide d'une intégration par partie, avec :

$$\begin{cases} u(x) = \dfrac{x^2}{2} \\ v'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \end{cases}$$

$$\int x\arctan(x)dx = \left[\frac{x^2}{2}\arctan(x)\right] - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$$

On sait de plus que :

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int 1dx - \int \frac{1}{1+x^2}dx = x - \arctan(x)$$

On en déduit donc que :

$$\int x\arctan(x)dx = \frac{x^2}{2}\arctan(x) - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\arctan(x)$$

$$\{F_4 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}), F_4' = f_4\} = \left\{x \mapsto \frac{x^2+1}{2}\arctan(x) - \frac{x}{2} + c, c \in \mathbb{R}\right\}$$

$f_5 : x \longmapsto x^2\cos(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une promitive sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\int x^2\cos(x)\,dx = [x^2\sin(x)] - \int 2x\sin(x)dx$$

De la même façon on effectue de nouveau une IPP :

$$\int 2x\sin(x)dx = [-2x\cos(x)] + 2\int \cos(x)\,dx = -2x\cos(x) + 2\sin(x)$$

On en déduit donc que :

$$\int x^2\cos(x)\,dx = x^2\sin(x) + 2x\cos(x) - 2\sin(x)$$

On en déduit donc que :

$$\{F_5 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}), F_5' = f_5\} = \{x \longmapsto (x^2-2)\sin(x) + 2x\cos(x) + c, c \in \mathbb{R}\}$$

Remarque : On peut aussi faire cet exercice par « intuition » !

On pose $g : x \mapsto \cos(x)\,(Ax^2 + Bx + C) + \sin(x)\,(\alpha x^2 + \beta x + \delta)$

g est une primitive de f_5 si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \cos(x)\,(\alpha x^2 + \beta x + \delta + 2Ax + B) + \sin(x)\,(-Ax^2 - Bx - C + 2\alpha x + \beta)$$

On identifie :

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta + 2A = 0 \\ B + \delta = 0 \\ -A = 0 \\ 2\alpha - B = 0 \\ \beta - C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = A = 0 \\ \delta = -2 \\ B = 2 \\ \beta = 0 \\ C = 0 \end{cases}$$

On en déduit donc qu'une primitive de $x \mapsto\ x^2\cos(x)$ est :

$$g : x \mapsto (x^2-2)\sin(x) + 2x\cos(x)$$

On en déduit donc que g est une primitive de $x \mapsto\ (x+3)\cos(3x)$ si et seulement si :

$$x \mapsto g : x \mapsto (x^2-2)\sin(x) + 2x\cos(x) + c, c \in \mathbb{R}$$

Exercice B.2 : A l'aide d'un changement de variable, déterminer une primitive des fonctions suivantes et préciser le domaine de validité :

$1. f_1 : x \mapsto \dfrac{x^7}{(x^4+1)^2}$ $\quad 2. f_2 : x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)}$ $\quad 3. f_3 : x \mapsto \dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$ $\quad 4. f_4 : x \mapsto e^{\sqrt{x}}$

$5. f_5 : x \mapsto \dfrac{1}{e^x(1+e^x)}$ $\quad 6. f_6 : x \mapsto \dfrac{3}{x}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ $\quad 7. f_7 : x \mapsto \dfrac{1}{\tan(x)+1}$

On applique à chaque calcul le même procédé :

a) On cherche le domaine de continuité de f_i.

b) On pose le changement de variable $u = f(x)$, on vérifie que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le domaine de continuité et on calcule $\frac{du}{dx}$.

c) On change les primitives sans oublier le dx. (ON NE MELANGE PAS LES DEUX VARIABLES !!!).

d) On calcule une nouvelle primitive.

e) On change la variable u.

1. $f_1 : x \mapsto \dfrac{x^7}{(x^4+1)^2}$

a) Domaine de continuité.

$f_1 \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ donc admet une primitive sur $\mathbb{R}$.

b) Changement de variable.

On pose : $u = x^4$. $x : \mapsto x^4$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\frac{du}{dx} = 4x^3$$

c) Une nouvelle primitive

On a :

$$\int \frac{x^7}{(1+x^4)^2}dx = \frac{1}{4}\int \frac{x^4}{(1+x^4)^2}4x^3dx = \frac{1}{4}\int \frac{u}{(1+u)^2}du$$

d) Calcul de la nouvelle primitive

On a :

$$\frac{1}{4}\int \frac{u}{(1+u)^2}du = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+u}du - \frac{1}{4}\int \frac{1}{(1+u)^2}du = \frac{1}{4}\ln(|1+u|) + \frac{1}{4}\times\frac{1}{1+u}$$

e) On change u en x

On sait que $u = x^4$. On en déduit donc que :

$$\int \frac{x^7}{(1+x^4)^2}dx = \frac{1}{4}\ln(|1+x^4|) + \frac{1}{4}\times\frac{1}{1+x^4} = \frac{1}{4}\ln(1+x^4) + \frac{1}{4}\times\frac{1}{1+x^4}$$

Remarque :

Avec un peu d'habitude on peut écrire :

$$\begin{aligned}\int \frac{x^7}{(1+x^4)^2}dx &= \frac{1}{4}\int \frac{x^4}{(1+x^4)^2}4x^3dx\\ &= \frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{1+x^4}dx - \frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{(1+x^4)^2}dx\\ &= \frac{1}{4}\int \frac{u'(x)}{u(x)}dx - \frac{1}{4}\int \frac{u'(x)}{u^2(x)}dx\\ &= \frac{1}{4}\ln(1+x^4) + \frac{1}{4}\times\frac{1}{1+x^4}\end{aligned}$$

---

2. $f_2 : x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)}$

a) Domaine de continuité.

On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$$

On en déduit donc que f_2 est définie sur $\mathbb{R}$. $f_2 \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ donc admet une primitive sur $\mathbb{R}$.

b) Changement de variable.

On pose : $u = e^x$. $x : \mapsto e^x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\frac{du}{dx} = e^x$$

c) Une nouvelle primitive

On a :

$$\int \frac{1}{\mathrm{ch}(x)}dx = 2\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}dx = 2\int \frac{1}{e^{2x}+1}e^x dx = 2\int \frac{1}{1+u^2}du$$

d) Calcul de la nouvelle primitive

On a :

$$2\int \frac{1}{1+u^2}du = 2\arctan(u)$$

e) On change u en x

On sait que $u = e^x$. On en déduit donc que :

$$\int \frac{1}{\mathrm{ch}(x)}dx = 2\arctan(e^x)$$

Remarque :
Avec un peu d'habitude on peut écrire :

$$\int \frac{1}{\mathrm{ch}(x)}dx = 2\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}dx = 2\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx = 2\int \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}dx = 2\arctan(e^x)$$

---

3. $f_3 : x \mapsto \dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$

a) Domaine de continuité.

On sait que :

$$(1+x)\sqrt{x} \neq 0 \Leftrightarrow x > 0$$

On en déduit donc que f_2 est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$. $f_2 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^{+*})$ donc admet une primitive sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b) Changement de variable.

On pose : $u = \sqrt{x}$. $x: \mapsto \sqrt{x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et :

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

c) Une nouvelle primitive

On a :

$$\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}dx = 2\int \frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = 2\int \frac{1}{1+u^2}du$$

d) Calcul de la nouvelle primitive

On a :

$$2\int \frac{1}{1+u^2}du = 2\arctan(u)$$

e) On change u en x

On sait que $u = \sqrt{x}$. On en déduit donc que :

$$\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}dx = 2\arctan\left(\sqrt{x}\right)$$

Remarque :
Avec un peu d'habitude on peut écrire :

$$\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}dx = 2\int \frac{1}{(1+x)} \times \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = 2\int \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}dx = 2\arctan\left(\sqrt{x}\right)$$

---

4. $f_4 : x \mapsto e^{\sqrt{x}}$

a) Domaine de continuité.

On sait que :

$x \mapsto e^{\sqrt{x}}$ est définie si et seulement si $x \geq 0$

On en déduit donc que f_2 est définie sur $\mathbb{R}^{+}$. $f_2 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^{+})$ donc admet une primitive sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b) Changement de variable.

On pose : $u = \sqrt{x}$. $x: \mapsto \sqrt{x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et :

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

c) Une nouvelle primitive

On a :

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx = 2\int \sqrt{x} \times e^{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = 2\int ue^u du$$

d) Calcul de la nouvelle primitive

On a à l'aide d'une IPP :

$$2\int ue^u du = 2[ue^u] - 2\int e^u\,du = 2(u-1)e^u$$

e) On change u en x

On sait que $u = \sqrt{x}$. On en déduit donc que :

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx = 2\left(\sqrt{x}-1\right)e^{\sqrt{x}}$$

Remarque :

Avec un peu d'habitude on peut écrire :

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx = 2\int \sqrt{x}e^{\sqrt{x}} \times \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = 2\int u(x)u'(x)e^{u(x)}\,dx = 2\left[u(x)e^{u(x)}\right] - 2\int u'(x)e^{u(x)}dx = 2(u(x)-1)e^{u(x)}$$
$$= 2\left(\sqrt{x}-1\right)e^{\sqrt{x}}$$

---

5. $f_5 : x \mapsto \dfrac{1}{e^x(1+e^x)}$

a) Domaine de continuité.

On sait que :

$x \mapsto e^x(1+e^x)$ est définie et strcitement positive sur $\mathbb{R}$.

On en déduit donc que f_5 est définie sur $\mathbb{R}$. $f_5 \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ donc admet une primitive sur $\mathbb{R}$.

b) Changement de variable.

On pose : $u = e^x$. $x : \mapsto e^x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\frac{du}{dx} = e^x$$

c) Une nouvelle primitive

On a :

$$\int \frac{1}{e^x(1+e^x)}dx = \int \frac{e^x}{e^{2x}(1+e^x)}\,dx = \int \frac{1}{u^2(1+u)}du$$

d) Calcul de la nouvelle primitive

On a :

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{u^2(1+u)}du &= \int \frac{1+u-u}{u^2(1+u)}du\\ &= \int \frac{1}{u^2}du - \int \frac{1}{u(1+u)}du\\ &= -\frac{1}{u} - \int \frac{1+u-u}{u(1+u)}du\\ &= -\frac{1}{u} - \ln(|u|) + \ln(|1+u|)\end{aligned}$$

e) On change u en x

On sait que $u = e^x$. On en déduit donc que :

$$\int \frac{1}{e^x(1+e^x)}dx = -e^{-x} - x + \ln(1+e^x)$$

Remarque :

Avec un peu d'habitude on peut écrire :

$$\int \frac{1}{e^x(1+e^x)}dx = \int \frac{1}{e^{2x}(1+e^x)} \times e^x dx = \int \frac{1}{u^2(x)\left(1+u(x)\right)}u'(x)\,dx$$

De plus on sait que :

$$\begin{aligned}\frac{1}{u^2(x)\left(1+u(x)\right)} &= \frac{1+u(x)-u(x)}{u^2(x)\left(1+u(x)\right)}\\ &= \frac{1}{u^2(x)} - \frac{1}{u(x)\left(1+u(x)\right)}\\ &= \frac{1}{u^2(x)} - \frac{1}{u(x)} + \frac{1}{1+u(x)}\end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\int \frac{1}{e^x(1+e^x)}dx = \int \frac{u'(x)}{u^2(x)}dx - \int \frac{u'(x)}{u(x)}dx + \int \frac{u'(x)}{1+u(x)}dx = -e^{-x} - x + \ln(1+e^x)$$

---

6. $f_6 : x \mapsto \dfrac{3}{x}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

a) Domaine de continuité.

On sait que :

$$\mathcal{D}_{f_6} = \left\{x \in \mathbb{R}, \frac{x-1}{x+1} \geq 0\right\} = \mathbb{R}\backslash[-1;1[$$

On en déduit donc que f_6 est définie sur $\mathbb{R}\backslash[-1;1[$. $f_5 \in \mathcal{C}(]-\infty;-1[)$ *et* $f_5 \in \mathcal{C}([1;+\infty[)$ donc admet une primitive sur chacun de ces intervalles.

b) Changement de variable.

On pose : $u = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$. $x{:} \mapsto \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty;-1[$ et sur $]1;+\infty[$ et :

$$\frac{du}{dx} = \frac{2}{(x+1)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} = \frac{1}{(x+1)^2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}$$

c) Une nouvelle primitive

On a :

$$\int \frac{3}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx = \int \frac{3}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \times (x+1)^2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}$$
$$= \int \frac{3}{x} \times \frac{x-1}{x+1} \times (x+1)^2\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$$
$$= \int \frac{3}{x}(x^2-1)\frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}$$

Ici on doit exprimer x en fonction de u.

On a :

$$u = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \Leftrightarrow u^2 = \frac{x-1}{x+1} \Leftrightarrow x = \frac{u^2+1}{1-u^2}$$

On en déduit donc que :

$$x^2 - 1 = \frac{4u^2}{(1-u^2)^2}$$

On en déduit donc que :

$$\int \frac{3}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx = 3\int \frac{1-u^2}{1+u^2} \times \frac{4u^2}{(1-u^2)^2}du = 12\int \frac{u^2}{(1-u^2)(1+u^2)}du$$

d) Calcul de la nouvelle primitive

On a :

$$12\int \frac{u^2}{(1-u^2)(1+u^2)}du = 6\int \frac{1}{1-u^2}du - 6\int \frac{1}{1+u^2}du$$
$$= 6\int \frac{1}{(1-u)(1+u)}du - 6\arctan(u)$$
$$= 3\int \frac{1}{1+u}du + 3\int \frac{1}{1-u}du - 6\arctan(u)$$
$$= 3\ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right) - 6\arctan(u)$$

e) On change u en x

On sait que $u = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$. On en déduit donc que :

$$\int \frac{3}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx = 3\ln\left(\frac{1+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{1-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}\right) - 6\arctan\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)$$

1^{er} cas : Si $x \geq 1$:

$$\frac{1+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{1-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}=\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}=x+\sqrt{x^2-1}$$

On en déudit donc que :

$$\forall x \geq 1, \int \frac{3}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx = 3\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)-6\arctan\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)$$

$2^{ième}$ cas : Si $x < -1$

$$\frac{1+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{1-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}=\frac{1+\sqrt{\frac{1-x}{-1-x}}}{1-\sqrt{\frac{1-x}{-1-x}}}=\frac{\sqrt{-x-1}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{-x-1}-\sqrt{1-x}}=-x+2\sqrt{x^2-1}$$

On en déduit donc que :

$$\forall x < 1, \int \frac{3}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx = 3\ln\left(-x+\sqrt{x^2-1}\right)-6\arctan\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)$$

---

7. $f_7 : x \mapsto \frac{1}{\tan(x)+1}$

a) Domaine de continuité.

On sait que :

$$\mathcal{D}_{\tan}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$$

De plus on peut voir que :

$$\mathcal{D}_{f_7}=\left\{x\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[, \tan(x)\neq -1\right\}$$

On sait que :

$$\tan(x)=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

On en déduit donc que :

$$\mathcal{D}_{f_7}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left(\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi;-\frac{\pi}{4}+k\pi\right[\cup\left]-\frac{\pi}{4}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi;\right[\right)$$

Pour plus de facilité nous allons restreindre la recherche d'une primitive de f_7 sur les intervalles $\left]-\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{4}\right[\cup\left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[$.

b) Changement de variable.

On pose : $u=\tan(x)$. $x:\mapsto \tan(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]-\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{4}\right[$ et sur $\left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[$. De plus on a :

$$\frac{du}{dx}=\tan^2(x)+1=u^2+1$$

On en déduit donc que :

$$\frac{du}{u^2+1}=dx$$

c) Une nouvelle primitive

On a :

$$\int\frac{1}{\tan(x)+1}dx=\int\frac{1}{(1+u)(1+u^2)}du$$

d) Calcul de la nouvelle primitive

On cherche à calculer :

$$\int\frac{1}{(1+u)(1+u^2)}du$$

On décompose en éléments simples :

$$\frac{1}{(1+u)(1+u^2)} = \frac{au+b}{1+u^2} + \frac{c}{1+u} = \frac{(au+b)(1+u)+c(1+u^2)}{(1+u)(1+u^2)} = \frac{u^2(a+c)+u(a+b)+c+b}{(1+u)(1+u^2)}$$

Par identification on a :

$$\begin{cases} a+c=0 \\ a+b=0 \\ c+b=1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{2} \\ b=\frac{1}{2} \\ c=\frac{1}{2} \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$\int \frac{1}{(1+u)(1+u^2)}du = \frac{1}{2}\int \frac{1-u}{1+u^2}du + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+u}du$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+u^2}du - \frac{1}{2}\int \frac{u}{1+u^2}du + \frac{1}{2}\ln(|1+u|)$$
$$= \frac{1}{2}\arctan(u) - \frac{1}{4}\ln(1+u^2) + \frac{1}{2}\ln(|1+u|)$$

e) On change u en x

On sait que $u = \tan(x)$. On en déduit donc que :

$$\int \frac{1}{\tan(x)+1}dx = \frac{1}{2}\arctan(\tan(x)) - \frac{1}{4}\ln(1+\tan^2(x)) + \frac{1}{2}\ln(|1+\tan(x)|)$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[, \int \frac{1}{\tan(x)+1}dx = \frac{1}{2}x + \ln\left(\sqrt{\cos(x)}\right) + \frac{1}{2}\ln(1+\tan(x))$$

Exercice B.3 : Déterminer les valeurs des primitives suivantes :

1) $\int^x t\ln(t^2+1)dt$; 2) $\int^x (t^2-t+3)e^{2t}dt$, 3) $\int^x \ln(1+t^2)dt$

4) $\int^x t\sin^3(t)dt$, 5) $\int^x \sqrt{16t^2+9}dt$ 6) $\int^x \mathrm{sh}(t)\sin(t)$

1. On a $t \mapsto t\ln(1+t^2) \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ donc elle admet une primitive sur $\mathbb{R}$. De plus on a :

$$\int^x t\ln(t^2+1)dt = \frac{1}{2}\int^x u'(t)\ln\big(u(t)\big)dt \text{ avec } u(t) = 1+t^2$$

Or on sait, à l'aide d'une IPP, que :

$$\int^x \ln(t)\,dt = x\ln(x) - x + c, c \in \mathbb{R}$$

On en déduit donc que :

$$\int^x u'(t)\ln\big(u(t)\big)dt = u(x)\ln\big(1+u(x)\big) - u(x) + c, c \in \mathbb{R}$$

(**Remarque** : On peut vérifier ce résultat très rapidement en dérivant $x \mapsto u(x)\ln\big(1+u(x)\big) - u(x)$).

On en déduit donc que :

$$\int^x t\ln(t^2+1)dt = \frac{1}{2}(1+t^2)(\ln(1+t^2)-1) + c, c \in \mathbb{R}$$

On a $f_2 : t \mapsto (t^2-t+3)e^{2t} \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ donc elle admet une primitive sur $\mathbb{R}$.

Pour déterminer une primitive de f_2, on peut le faire de deux façons.

Méthode 1 : La méthode intuitive

On pose $g : t \mapsto (at^2+bt+c)e^{2t}$. On sait que g est une primitive de f_2 sur $\mathbb{R}$ si et seulement si :

$$\forall t \in \mathbb{R}, g'(t) = (2at^2+2bt+2c+2at+b)e^{2t} = (t^2-t+3)e^{2t}$$

On identifie :

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2(b+a) = -1 \\ b + 2c = 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -1 \\ c = 2 \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$\int^x (t^2 - t + 3)e^{2t}dt = \left(\frac{1}{2}x^2 - x + 2\right)e^{2x} + c, c \in \mathbb{R}$$

Méthode 2 : Double IPP

$$\int^x (t^2 - t + 3)e^{2t}dt = \left[(x^2 - x + 3)\frac{1}{2}e^{2x}\right] - \frac{1}{2}\int^x (2t-1)e^{2t}dt$$

$$= (x^2 - x + 3)\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\left(\left[(2x-1)\frac{1}{2}e^{2x}\right] - \int^x e^{2t}dt\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + c, c \in \mathbb{R}$$

On en déduit donc que :

$$\int^x (t^2 - t + 3)e^{2t}dt = \left(\frac{1}{2}x^2 - x + 2\right)e^{2x} + c, c \in \mathbb{R}$$

On a $f_3 : t \mapsto \ln(1+t^2) \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ donc elle admet une primitive sur $\mathbb{R}$.
On effectue une IPP :

$$\int^x \ln(1+t^2)dt = \int^x 1 \times \ln(1+t^2)dt = [x\ln(1+x^2)] - 2\int^x \frac{t^2}{1+t^2}dt$$

De plus on sait que :

$$\int^x \frac{t^2}{1+t^2}dt = \int^x 1dt - \int^x \frac{1}{1+t^2}dt = x - \arctan(x) + c, c \in \mathbb{R}$$

On en déduit donc que :

$$\int^x \ln(1+t^2)dt = x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan(x) + c, c \in \mathbb{R}$$

---

4) On sait que $f_4 : t \mapsto t\sin^3(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive sur $\mathbb{R}$.
De plus on sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin^3(x) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 = -\frac{e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}}{8i} = -\frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin(x)$$

On en déduit donc que :

$$\int^x t\sin^3(t)dt = -\frac{1}{4}\int^x t\sin(3t)dt + \frac{3}{4}\int^x t\sin(t)dt$$

On effectue deux IPP :

$$\int^x t\sin(3t)dt = \left[-\frac{x\cos(3x)}{3}\right] + \frac{1}{3}\int^x \cos(3t)dt = -\frac{1}{3}x\cos(3x) + \frac{1}{9}\sin(3x)$$

$$\int^x t\sin(t)dt = [-x\cos(x)] + \int^x \cos(t)dt = -x\cos(x) + \sin(x)$$

On en déduit donc que :

$$\int^{x} t\sin^3(t)dt = -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}x\cos(3x) + \frac{1}{9}\sin(3x)\right) + \frac{3}{4}(-x\cos(x) + \sin(x)) + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \int^{x} t\sin^3(t)dt = \frac{1}{12} \times \cos(3x) - \frac{1}{36} \times \sin(3x) - \frac{3}{4}x\cos(x) + \frac{3}{4}\sin(x) + c, c \in \mathbb{R}$$

---

5) On a $f_5 : t \mapsto \sqrt{16t^2 + 9}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive sur $\mathbb{R}$. De plus on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \sqrt{16t^2 + 9} = 3\sqrt{\left(\frac{4}{3}t\right)^2 + 1}$$

On effectue un changement de variable. On pose : $\mathrm{sh}(y) = \frac{4}{3}t$. Cela est possible car on sait que sh définie une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On a donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \exists!\, x \in \mathbb{R}, \frac{4}{3}t = \mathrm{sh}(y)$$

De plus on a :

$$dt = \frac{3}{4}\mathrm{ch}(y)dy$$

On en déduit donc que :

$$\int^{x} \sqrt{16t^2 + 9}dt = 3\int^{x} \sqrt{\mathrm{sh}^2(y) + 1}\frac{3}{4}\mathrm{ch}(y)dy = \frac{9}{4}\int^{x} \sqrt{\mathrm{sh}^2(y) + 1}\mathrm{ch}(y)dy = \frac{9}{4}\int^{x} \mathrm{ch}^2(y)dy$$

De plus on sait que :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}^2(y) = \frac{\mathrm{ch}(2y) + 1}{2}$$

On en déduit donc que :

$$\frac{9}{4}\int^{x} \mathrm{ch}^2(y)dy = \frac{9}{4}\int^{x} \frac{\mathrm{ch}(2y) + 1}{2}dy = \frac{9}{8}\left[\frac{\mathrm{sh}(2x)}{2} + x\right] = \frac{9}{16}\mathrm{sh}(2x) + \frac{9}{8}x + c, c \in \mathbb{R}$$

Il reste à déterminer la valeur de y.
On sait que :

$$\mathrm{sh}(y) = x \Leftrightarrow y = \ln\left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right)$$

De plus on sait que :

$$\mathrm{sh}(2y) = 2\mathrm{ch}(y)\mathrm{sh}(y)$$

On en déduit donc que :

$$\mathrm{sh}(2y) = 2\sqrt{1 + \mathrm{sh}^2(y)}\mathrm{sh}(y) = 2\sqrt{1 + \frac{16}{9}t^2} \times \frac{4}{3}t$$

On en déduit donc que :

$$\int^{x} \sqrt{16t^2 + 9}dt = \frac{3}{2}x\sqrt{1 + \frac{16}{9}x^2} + \frac{9}{8}\ln\left(\sqrt{\frac{16}{9}x^2 + 1} - \frac{16}{9}x\right) + c, c \in \mathbb{R}$$

---

6) La fonction $f_6 : x \mapsto \mathrm{sh}(x)\sin(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive sur $\mathbb{R}$.
On pose :

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \mathrm{ch}(x)\sin(x) - \mathrm{sh}(x)\cos(x) \end{cases}$$

On a alors $g \in \mathbb{D}(\mathbb{R})$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \mathrm{sh}(x)\sin(x) + \mathrm{ch}(x)\cos(x) - \mathrm{ch}(x)\cos(x) + \mathrm{sh}(x)\sin(x) = 2\mathrm{sh}(x)\sin(x)$$

On en déduit donc que :

$$\int^{x} \mathrm{sh}(t)\sin(t) = \frac{1}{2}(\mathrm{ch}(x)\sin(x) - \mathrm{sh}(x)\cos(x))$$

Remarque : On peut déterminer une primitive de f_6 en utilisant les complexes.
On a :

$$\forall x\in\mathbb{R}, \operatorname{sh}(x)\sin(x)=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\times\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$$
$$=-\frac{i}{4}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\left(e^{x}-e^{-x}\right)$$
$$=-\frac{i}{4}\left(e^{x(1+i)}-e^{x(-1+i)}-e^{x(1-i)}+e^{-x(1+i)}\right)$$

On en déduit donc que :

$$\int^{x}\operatorname{sh}(t)\sin(t)\,dt=-\frac{i}{4}\times\left(\frac{e^{x(1+i)}}{1+i}-\frac{e^{x(-1+i)}}{-1+i}-\frac{e^{x(1-i)}}{1-i}-\frac{e^{-x(1+i)}}{1+i}\right)$$
$$=-\frac{i}{8}\times\left((1-i)e^{x(1+i)}+(1+i)e^{x(-1+i)}+(1+i)e^{x(1-i)}-(1-i)e^{-x(1+i)}\right)$$
$$=-\frac{i}{8}e^{ix}(e^{x}+e^{-x})+\frac{1}{8}e^{ix}(e^{x}-e^{-x})-\frac{i}{8}e^{-ix}(e^{x}-e^{-x})+\frac{1}{8}e^{-ix}(e^{x}+e^{-x})$$
$$=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)-\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)\right)$$

Exercice B.4 :

1) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{\arcsin(t)}{1-t^2}}dt$ 2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3(t)\sin^4(t)\,dt$ 3) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(t^2+t+1)e^{-t}dt$

4) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(t^3-1)\operatorname{ch}(t)dt$ 5) $\displaystyle\int_0^1\frac{dt}{2t^2+2t+1}$ 6) $\displaystyle\int_0^1\frac{dt}{e^t+1}$

1) On sait que :

$$t\mapsto\sqrt{\frac{\arcsin(t)}{1-t^2}}\in\mathcal{C}^0\left(\left[0;\frac{1}{2}\right],\mathbb{R}\right)$$

Donc l'intégrale à du sens.

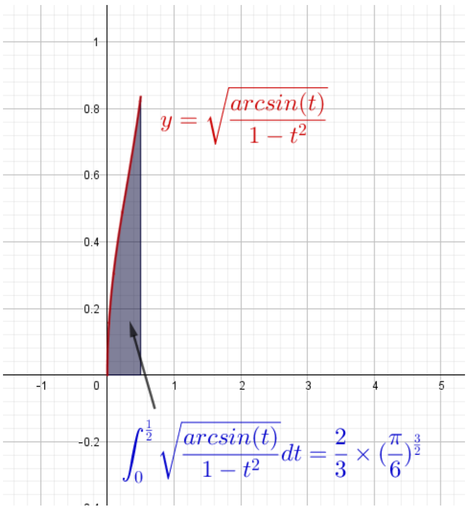
De plus on a :

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{\arcsin(t)}{1-t^2}}dt=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\sqrt{\arcsin(t)}\,dt=\int_0^{\frac{1}{2}}u'(t)\sqrt{u(t)}\,dt \text{ avec } u(t)=\arcsin(t)$$

On en déduit donc que :

$$\int_0^{\frac{1}{2}}u'(t)\sqrt{u(t)}\,dt=\frac{2}{3}\left[u^{\frac{3}{2}}(t)\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}\left(\arcsin^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)-\arcsin^{\frac{3}{2}}(0)\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{\frac{3}{2}}$$

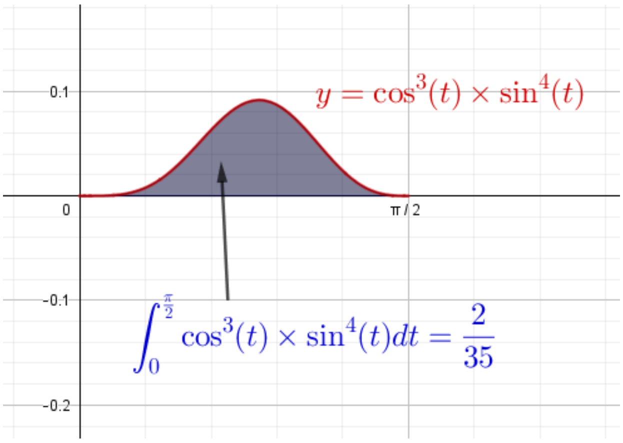
On a la courbe :



2) On a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(t)\sin^4(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\sin^4(t)\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\sin^6(t)\,dt = \left[\frac{\sin^5(t)}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{\sin^7(t)}{7}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{2}{35}$$

On a la courbe suivant :



3) On sait que $t \mapsto (t^2+t+1)e^{-t} \in \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$ donc l'intégrale à du sens.

On effectue une double IPP :

$$\int_{-1}^{1} (t^2+t+1)e^{-t}dt = \underbrace{[-(t^2+t+1)e^{-t}]_{-1}^{1}}_{e-3e^{-1}} + \int_{-1}^{1} (2t+1)e^{-t}dt$$

De plus on a :

$$\int_{-1}^{1} (2t+1)e^{-t}dt = [-(2t+1)e^{-t}]_{-1}^{1} + 2\int_{-1}^{1} e^{-t}dt = -e - 3e^{-1} - 2[e^{-t}]_{-1}^{1} = -5e^{-1} + e$$

On en déduit donc que :

$$\int_{-1}^{1} (t^2+t+1)e^{-t}dt = 2e - 8e^{-1}$$

Remarque :

On peut chercher directement une primitive de $t \mapsto (t^2+t+1)e^{-t}$ sans passer par une IPP.

On pose $g_{a,b,c}: x \mapsto (ax^2+bx+c)e^{-x}$. On sait que $g_{a,b,c}$ est une primitive de $t \mapsto (t^2+t+1)e^{-t}$ si et seulement si :

$$\forall x \in [-1;1], g'_{a,b,c}(x) = (2ax+b-ax^2-bx-c)e^{-x} = (-ax^2+x(2a-b)+b-c)e^{-x} = (x^2+x+1)e^{-x}$$

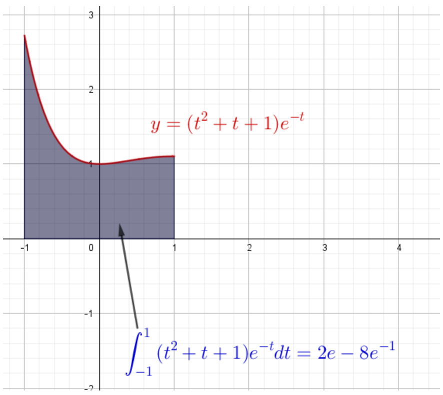
On identifie :

$$\begin{cases} a = -1 \\ 2a - b = 1 \\ b - c = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -3 \\ c = -4 \end{cases}$$

On a donc :

$$\int_{-1}^{1} (t^2+t+1)e^{-t}dt = [(-x^2-3x-4)e^{-x}]_{-1}^{1} = 2e - 8e^{-1}$$

On a la courbe :



4) On sait que $t \mapsto (t^3-1)\mathrm{ch}(t) \in \mathcal{C}([-1;1],\mathbb{R})$ donc l'intégrale existe. De plus on a :

$$\int_{-1}^{1}(t^3-1)\mathrm{ch}(t)dt = \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1}(t^3-1)e^t dt + \int_{-1}^{1}(t^3-1)e^{-t}dt\right)$$

Méthode 1 : On effectue une IPP

On a :

$$\int_{-1}^{1}(t^3-1)e^t dt = \underbrace{[(t^3-1)e^t]_{-1}^{1}}_{=2e^{-1}} - 3\int_{-1}^{1}t^2e^t dt$$

De plus on a :

$$\int_{-1}^{1}t^2e^t dt = [t^2e^t]_{-1}^{1} - 2\int_{-1}^{1}te^t dt$$

$$= e - e^{-1} - 2\left([te^t]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}e^t dt\right) = e - e^{-1} - 2(e + e^{-1} - e + e^{-1}) = e - 5e^{-1}$$

On en déduit donc que :

$$\int_{-1}^{1}(t^3-1)e^t dt = 17e^{-1} - 3e$$

De même on a :

$$\int_{-1}^{1}(t^3-1)e^{-t}dt = \underbrace{[-(t^3-1)e^{-t}]_{-1}^{1}}_{=-2e} + 3\int_{-1}^{1}t^2e^{-t}dt$$

De plus on a :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}t^2e^{-t}dt &= [-t^2e^{-t}]_{-1}^{1} + 2\int_{-1}^{1}te^{-t}dt\\ &= -e^{-1} + e^1 + 2\left([-te^{-t}]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1}e^{-t}dt\right)\\ &= -e^{-1} + e^1 + 2(-e^{-1} - e - [e^{-t}]_{-1}^{1})\\ &= -e^{-1} + e^1 + 2\big(-e^{-1} - e - (e^{-1} - e)\big)\\ &= -5e^{-1} + e\end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\int_{-1}^{1}(t^3-1)e^{-t}dt = e - 15e^{-1}$$

On en déduit donc que :

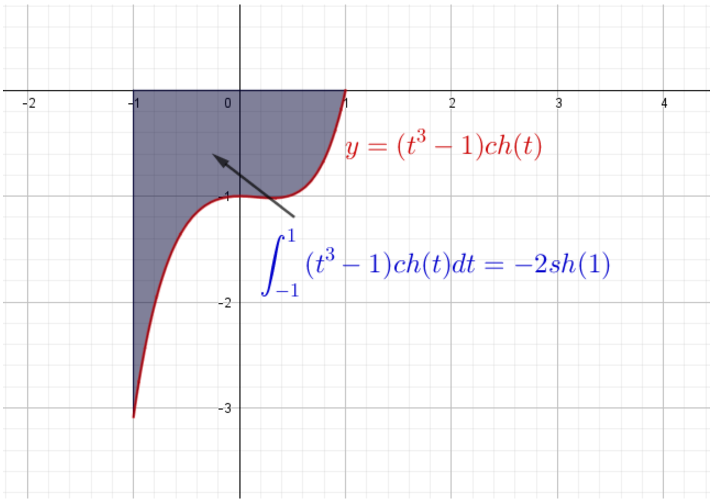
$$\int_{-1}^{1}(t^3-1)\mathrm{ch}(t)dt = \frac{1}{2}(17e^{-1} - 3e) + \frac{1}{2}(e - 15e^{-1}) = e^{-1} - e = -2\mathrm{sh}(1)$$

Méthode 2 : Avec une fonction impaire

On a :

$$\int_{-1}^{1}(t^3-1)\mathrm{ch}(t)dt = \underbrace{\int_{-1}^{1}t^3\mathrm{ch}(t)dt}_{\substack{=0 \text{ car} \\ t\mapsto t^3\mathrm{ch}(t)\text{ est impaire}}} - \int_{-1}^{1}\mathrm{ch}(t)dt = -\int_{-1}^{1}\mathrm{ch}(t)dt = -[\mathrm{sh}(t)]_{-1}^{1} = -2\mathrm{sh}(1)$$

Avec la courbe :



Remarque : On a le théoème suivant. Soit $a \in \mathbb{R}^+$ et $f: [-a; a] \to \mathbb{R}$ impaire. On a alors :

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$$

En effet il suffit d'écrire :

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = \int_{-a}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(t)dt$$

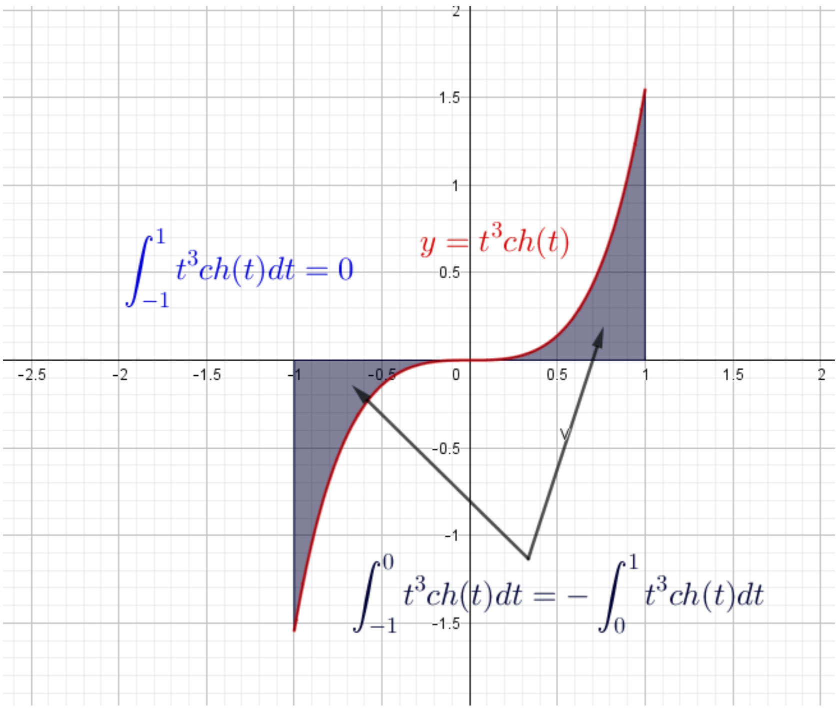
De plus avec le changement de variable $x = -t$ on a :

$$\int_{a}^{0} f(-x)(-dx) = -\int_{0}^{a} f(x)dx \ \text{ car f est impaire}$$

On a donc :

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = \int_{-a}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(t)dt = -\int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(t)dt = 0$$

On peut le voir sur la courbe :



5) On sait que $\forall t \in \mathbb{R}, 2t^2 + 2t + 1 = 2\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} > 0$. On en déduit donc que :

$$t \mapsto \frac{1}{2t^2 + 2t + 1} \in \mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R})$$

Donc l'intégrale a du sens !

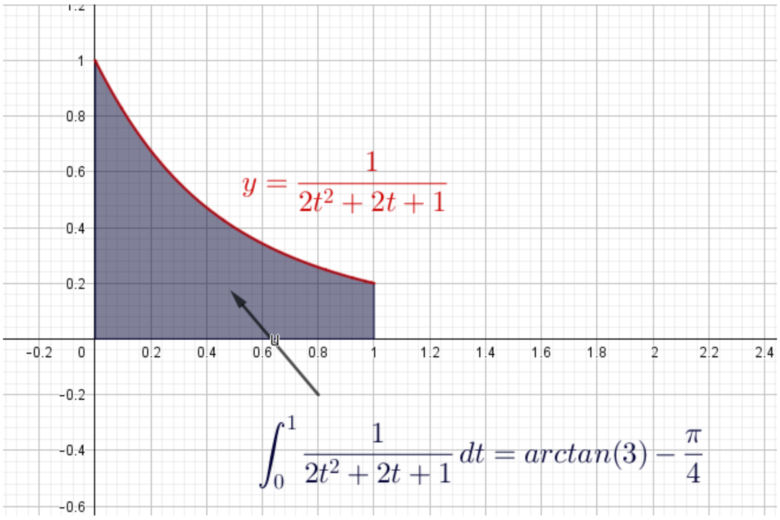
De plus on a :

$$\int_0^1 \frac{dt}{2t^2 + 2t + 1} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} = 2\int_0^1 \frac{dt}{(2t+1)^2 + 1} = \int_0^1 \frac{u'(t)dt}{1 + u^2(t)} \text{ avec } u(t) = 2t + 1$$

On en déduit donc que :

$$\int_0^1 \frac{dt}{2t^2 + 2t + 1} = [\arctan(2t+1)]_0^1 = \arctan(3) - \arctan(1) = \arctan(3) - \frac{\pi}{4}$$

Avec la courbe :



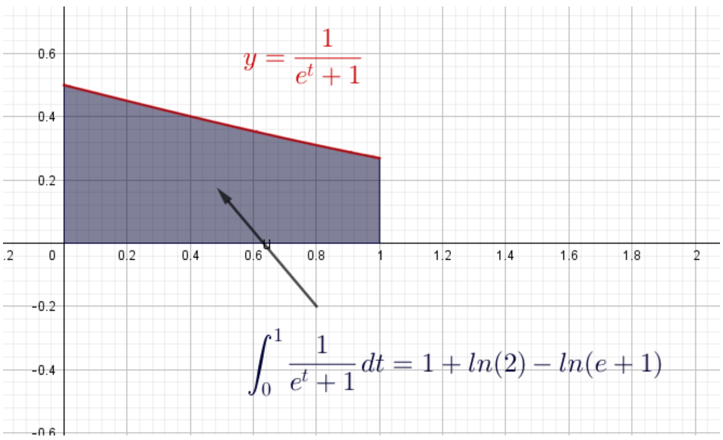
6) On sait que $\forall t \in \mathbb{R}, e^t + 1 > 0$. On en déduit donc que :

$$t \mapsto \frac{1}{e^t + 1} \in \mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R})$$

Donc l'intégrale à du sens. De plus on a :

$$\int_0^1 \frac{dt}{e^t + 1} = \int_0^1 \frac{e^t + 1}{e^t + 1} dt - \int_0^1 \frac{e^t}{e^t + 1} dt = 1 - \ln(e^t + 1)_0^1 = 1 - \ln(1 + e) + \ln(2)$$

Avec la courbe :



Exercice B.5 : En posant $x = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$, calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{2+\cos(t)}$ 2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{2-\sin(t)}$ 3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\sin(t)-\cos(t)+\sqrt{2}}$

1) On sait que $\forall t \in \mathbb{R}, 2+\cos(t) > 0$ donc l'intégrale I_1 est bien définie.
De plus on sait que :

$$\forall t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right], \frac{t}{2} \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right] \text{ donc } \tan\left(\frac{t}{2}\right) \text{ est bien définie.}$$

On pose le changement de variable $x = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$

a) Calcul des nouvelles bornes

$$\begin{cases} t = 0 \Longrightarrow x = 0 \\ t = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow x = 1 \end{cases}$$

b) Calcul du dt

On sait que :

$$x = \tan\left(\frac{t}{2}\right) \Longrightarrow t = 2\arctan(x) \ \text{ car } \frac{t}{2} \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right]$$

De plus on sait que :

$$t : x \mapsto 2\arctan(x) \in \mathcal{D}([0;1]) \text{ et } \frac{dt}{dx} = \frac{2}{1+x^2}$$

On en déduit donc que :

$$dt = \frac{2}{1+x^2}dx$$

c) On remplace tout pour obtenir une nouvelle intégrale

De plus on sait que :

$$\forall t \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right], \cos(2t) = \frac{\cos^2(t)-\sin^2(t)}{\cos^2(t)+\sin^2(t)} = \frac{1-\tan^2(t)}{1+\tan^2(t)}$$

On en déduit donc que :

$$\forall t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right], \cos(t) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

On en déduit donc que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{2+\cos(t)} = \int_0^1 \frac{1}{2+\frac{1-x^2}{1+x^2}} \times \frac{2}{1+x^2}dx = 2\int_0^1 \frac{1}{x^2+3}dx$$

d) Calcul de la nouvelle intégrale

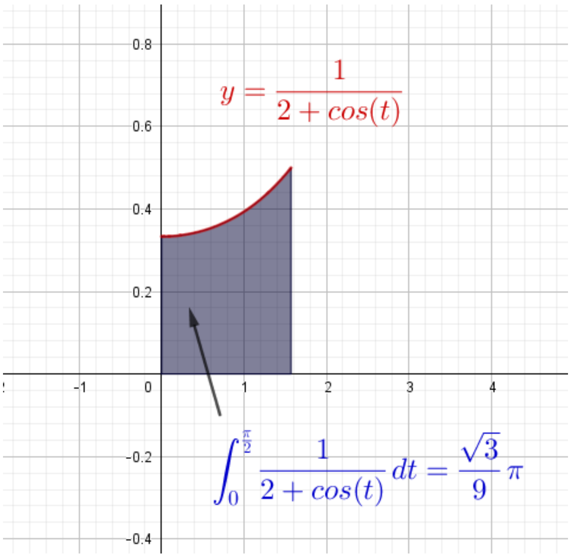
On sait que :

$$2\int_0^1 \frac{1}{x^2+3}dx = \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dx = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left[\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{3}\pi}{9}$$

On en déduit donc que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{2+\cos(t)} = \frac{\sqrt{3}\pi}{9}$$

On a la courbe suivante :



2) On sait que $t \mapsto 2 - \sin(t)$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc I_2 existe.

De plus on sait que :

$$\forall t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right], \frac{t}{2} \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right] \text{ donc } \tan\left(\frac{t}{2}\right) \text{ est bien définie.}$$

On pose le changement de variable $x = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$

a) Calcul des nouvelles bornes

$$\begin{cases} t = 0 \Longrightarrow x = 0 \\ t = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow x = 1 \end{cases}$$

b) Calcul du dt

On sait que :

$$x = \tan\left(\frac{t}{2}\right) \Longrightarrow t = 2\arctan(x) \;\text{ car } \frac{t}{2} \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right]$$

De plus on sait que :

$$t: x \mapsto 2\arctan(x) \in \mathcal{D}([0;1]) \text{ et } \frac{dt}{dx} = \frac{2}{1+x^2}$$

On en déduit donc que :

$$dt = \frac{2}{1+x^2}dx$$

c) On remplace tout pour obtenir une nouvelle intégrale

De plus on sait que :

$$\forall t \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right], \sin(2t) = \frac{2\cos(t)\sin(t)}{\cos^2(t)+\sin^2(t)} = \frac{2\tan(t)}{1+\tan^2(t)}$$

On en déduit donc que :

$$\forall t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right], \sin(t) = \frac{2x}{1+x^2}$$

On en déduit donc que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{2-\sin(t)} = \int_0^1 \frac{1}{2-\frac{2x}{1+x^2}} \times \frac{2}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1}dx$$

d) Calcul de la nouvelle intégrale

On sait que :

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1}dx = \int_0^1 \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx = \frac{4}{3}\int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dx$$

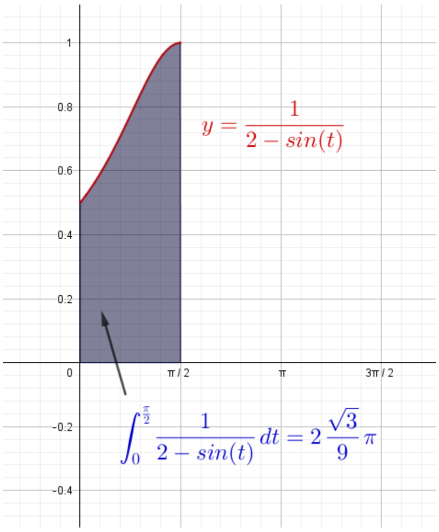
On en déduit donc que :

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1}dx = \frac{4}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 = \frac{4\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\sqrt{3}\pi}{9}$$

On en déduit donc que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{2+\cos(t)} = \frac{\sqrt{3}\pi}{9}$$

On a la courbe suivante :



---

3) On sait que :

$$\forall t \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right], \sin(t)-\cos(t)+\sqrt{2} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(t)-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(t)+1\right) = \sqrt{2}\left(-\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)+1\right)$$

Or on sait que :

$$\forall t \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right], t+\frac{\pi}{4} \in t \in \left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right) \in \left[0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

On en déduit donc que :

$$\forall t \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right], \sin(t)-\cos(t)+\sqrt{2} > 0$$

Donc I_3 a du sens. De plus :

$$\forall t \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right], \frac{t}{2} \in \left[0;\frac{\pi}{8}\right] \text{ donc } \tan\left(\frac{t}{2}\right) \text{ est bien définie.}$$

De plus on a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\sin(t)-\cos(t)+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{1-\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{1-\cos(u)} \quad \left(\text{on a posé } u = t+\frac{\pi}{4}\right)$$

On pose le changement de variable $x = \tan\left(\frac{u}{2}\right)$

a) Calcul des nouvelles bornes

$$\begin{cases} u = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 1 \\ u = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \tan\left(\frac{\pi}{8}\right) \end{cases}$$

b) Calcul du dt

On sait que :

$$x = \tan\left(\frac{u}{2}\right) \Rightarrow u = 2\arctan(x) \text{ car } \frac{u}{2} \in \left[\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{4}\right]$$

De plus on sait que :

$$u : x \mapsto 2\arctan(x) \in \mathcal{D}([0;1]) \text{ et } \frac{du}{dx} = \frac{2}{1+x^2}$$

On en déduit donc que :

$$\mathrm{du} = \frac{2}{1+\mathrm{x}^2}\mathrm{dx}$$

c) On remplace tout pour obtenir une nouvelle intégrale

De plus on sait que :

$$\forall \mathrm{t} \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right], \cos(u) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

On en déduit donc que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{dt}}{\sin(\mathrm{t}) - \cos(\mathrm{t}) + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{du}}{1-\cos(\mathrm{u})} = \sqrt{2}\int_{\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)}^{1} \frac{1}{1+\mathrm{x}^2-(1-\mathrm{x}^2)}\mathrm{dx}$$

d) Calcul de la nouvelle intégrale

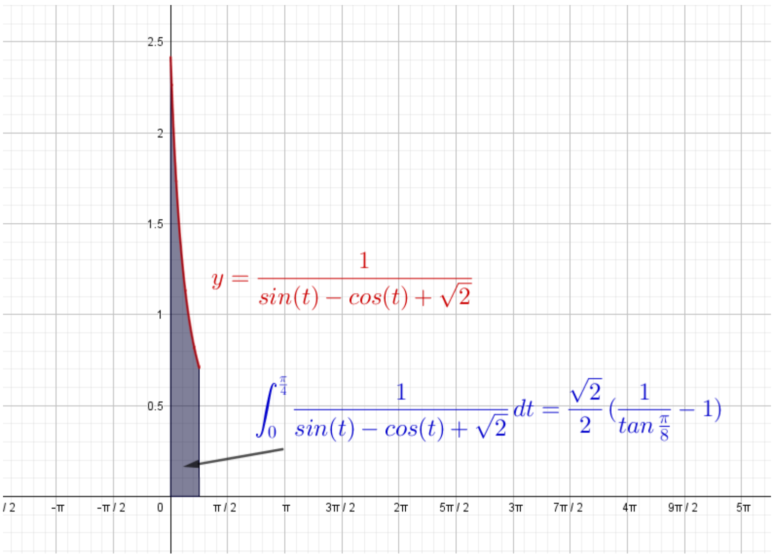
On sait que :

$$\sqrt{2}\int_{\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)}^{1} \frac{1}{1+\mathrm{x}^2-(1-\mathrm{x}^2)}\mathrm{dx} = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)}^{1} \frac{1}{\mathrm{x}^2}\mathrm{dx} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[-\frac{1}{\mathrm{x}}\right]_{\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)}^{1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)} - 1\right)$$

On en déduit donc que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{dt}}{\sin(\mathrm{t}) - \cos(\mathrm{t}) + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)} - 1\right)$$

On a la courbe suivante :



Remarque : On peut trouver facilement une valeur de $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$. En effet on sait que :

$$\forall a \in \left[0;\frac{\pi}{8}\right], \tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$$

On en déduit donc que :

$$\frac{2\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{\pi}{8}\right)} = 1 \Longrightarrow \tan\left(\frac{\pi}{8}\right) \ est\ solution\ de\ X^2 + 2X - 1 = 0$$

Or on sait que :

$$X^2 + 2X - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{-2-\sqrt{8}}{2} = -1-\sqrt{2} \\ ou \\ X = \sqrt{2} - 1 \end{cases}$$

Or on sait que $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0\ car\ \frac{\pi}{8} \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$. On en déduit donc que :

$$\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 1$$

On en déduit donc que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathbf{dt}}{\mathbf{sin(t) - cos(t)} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2} - 1} - 1\right) = 1$$

Ainsi on peut écrire que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\sin(t) - \cos(t) + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)} - 1\right) = 1$$

Partie C : Primitives et intégrales des fonctions rationnelles

Exercice C.1 : Déterminer les primitives des fonctions suivantes en précisant leur domaine de validité $f_1 : x \longmapsto \frac{1}{x^2 + x - 6}$; $f_2 : x \longmapsto \frac{x+3}{x^2 + x - 6}$; ; $f_3(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 3}$; $f_4(x) = \frac{2x^2 + x - 9}{x^2 + 2x + 3}$; $f_5 : x \longmapsto \frac{7x + 1}{x^2 - 6x + 9}$;

1) On sait que :

$$x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = -3$$

On en déduit donc que f_1 admet une primitive sur $]-\infty; -3[$ ou sur $]-3; 2[$ ou sur $]2; +\infty[$.
De plus on sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-3; 2\}, \frac{1}{x^2 + x - 6} = \frac{1}{(x+3)(x-2)} = \frac{1}{5}\frac{1}{x-2} - \frac{1}{5}\frac{1}{x+3}$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-3; 2\}, \int \frac{1}{x^2 + x - 6}\,dx = \frac{1}{5}\int \frac{1}{x-2}\,dx - \frac{1}{5}\int \frac{1}{x+3}\,dx = \frac{1}{5}\ln(|x-2|) - \frac{1}{5}\ln(|x+3|) + c, c \in \mathbb{R}$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash[-3; 2], \int \frac{1}{x^2 + x - 6}\,dx = \frac{1}{5}\ln\left(\frac{x-2}{x+3}\right) + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\forall x \in]-3; 2[, \int \frac{1}{x^2 + x - 6}\,dx = \frac{1}{5}\ln\left(\frac{2-x}{x+3}\right) + c, c \in \mathbb{R}$$

---

2) On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-3; 2\}, f(x) = \frac{x+3}{x^2 + x - 6} = \frac{1}{x-2}$$

On peut donc prolonger f par continuité sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ en posant $f(-3) = -\frac{1}{5}$

On en déduit que f admet une primitive sur $]-\infty; 2[$ et sur $]2; +\infty[$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}, \int \frac{x+3}{x^2 + x - 6}\,dx = \ln(|x-2|) + c, c \in \mathbb{R}$$

---

3) On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2 > 0$$

On en déduit donc que $f_3 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ et :

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x + 3}dx = \int \frac{1}{(x+1)^2 + 2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1}dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + c, c \in \mathbb{R}$$

On en déduit donc que :

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x + 3}dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + c, c \in \mathbb{R}$$

---

4) On sait que

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2 > 0$$

On en déduit donc que $f_4 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ et :

$$\forall x\in\mathbb{R},\frac{2x^2+x-9}{x^2+2x+3}=\frac{2(x^2+2x+3)-3x-15}{x^2+2x+3}=2-\frac{3x+15}{x^2+2x+3}$$

On en déduit donc que :

$$\int\frac{2x^2+x-9}{x^2+2x+3}dx=2x-\int\frac{3x+15}{x^2+2x+3}dx$$

On calcule :

$$\int\frac{3x+15}{x^2+2x+3}dx$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+3}dx+12\int\frac{1}{x^2+2x+3}dx=\frac{3}{2}\ln(x^2+2x+3)+6\sqrt{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+c,c\in\mathbb{R}$$

On en déduit donc que :

$$\int\frac{3x-3}{x^2+2x+3}dx=\frac{3}{2}\ln(x^2+2x+3)+6\sqrt{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+c,c\in\mathbb{R}$$

On en déduit donc que :

$$\int\frac{2x^2+x-9}{x^2+2x+3}dx=2x-\frac{3}{2}\ln(x^2+2x+3)-6\sqrt{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+c,c\in\mathbb{R}$$

---

5) On sait que :

$$\forall x\in\mathbb{R},x^2-6x+9=(x-3)^2$$

On en déduit donc que :

$$\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{3\},\int\frac{7x+1}{x^2-6x+9}dx=\frac{7}{2}\int\frac{2x-6}{x^2-6x+9}dx+22\int\frac{1}{(x-3)^2}dx$$
$$=\frac{7}{2}\ln(x^2-6x+9)-\frac{22}{x-3}+c,c\in\mathbb{R}$$

On en déduit donc que :

$$\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{3\},\int\frac{7x+1}{x^2-6x+9}dx=7\ln(|x-3|)-\frac{22}{x-3}+c,c\in\mathbb{R}$$

Exercice C.2 : Calculer :

$$I_1=\int_0^2\frac{1}{x^3+1}dx$$

On sait que $x\mapsto x^3+1\in\mathcal{C}([0;2],\mathbb{R})$ donc I_1 a du sens. De plus on sait que :

$$\forall x\in\mathbb{R},x^3+1=x^3-(-1)^3=\big(x-(-1)\big)(x^2-x+1)=(x+1)(x^2-x+1)$$

De plus on sait que $x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$ donc la factorisation sur $\mathbb{R}$ est maximale !

On décompose à présent $\frac{1}{x^3+1}$ en éléments simples :

$$\forall x\in[0;2],\frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{x^2-x+1}$$

On a alors :

$$\forall x\in[0;2],\frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{x^2-x+1}=\frac{a(x^2-x+1)+(bx+c)(x+1)}{x^3+1}$$
$$=\frac{x^2(a+b)+x(b+c-a)+a+c}{x^3+1}$$

Par identification on en déduit donc que :

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{x^2-x+1}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=0\\b+c-a=0\\a+c=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{3}\\b=-\frac{1}{3}\\c=\frac{2}{3}\end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in [0;2], \frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-x+1}\right)$$

On en déduit donc que :

$$\int_0^2 \frac{1}{x^3+1}dx = \frac{1}{3}\left(\int_0^2 \frac{1}{x+1}dx - \int_0^2 \frac{x-2}{x^2-x+1}dx\right)$$

On calcule les intégrales séparément :

$$\int_0^2 \frac{1}{x+1}dx = [\ln(x+1)]_0^2 = \ln(3)$$

De plus on a :

$$\int_0^2 \frac{x-2}{x^2-x+1}dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx - \frac{3}{2}\int_0^2 \frac{1}{x^2-x+1}dx$$

$$= \frac{1}{2}[\ln(x^2-x+1)]_0^2 - \frac{3}{2}\int_0^2 \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln(3) - \frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\int_0^2 \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln(3) - 2\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^2$$

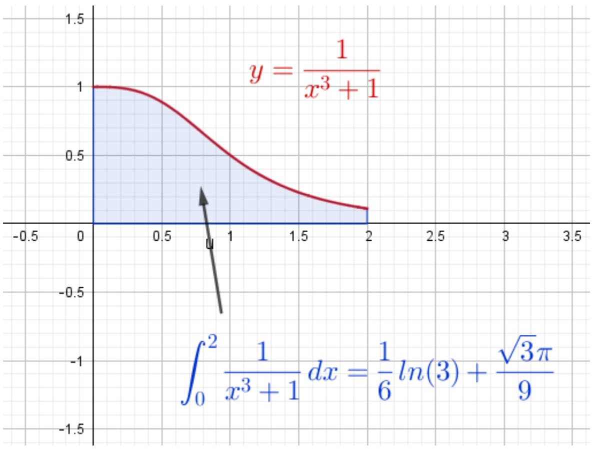
$$= \frac{1}{2}\ln(3) - \sqrt{3}\left(2\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\ln(3) - \sqrt{3}\times\frac{\pi}{3}$$

On en déduit donc que :

$$I_1 = \int_0^2 \frac{1}{x^3+1}dx = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\ln(3) + \sqrt{3}\times\frac{\pi}{3}\right)$$

On a la courbe suivante :



Exercice C.3 : On cherche à calculer :

$$I_1 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin(t)+\tan(t)}dt$$

1) En effectuant le changement de variable $u = \cos(t)$, montrer que l'on peut écrire :

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} R(u)du \text{ avec } R \text{ une fraction rationnelle.}$$

2) En déduire la valeur de l'intégrale I.

1) On sait que :

$$\forall t \in \left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right], \sin(t) + \tan(t) > 0$$

Donc I_1 existe. De plus effectue le changement de variable $u = \cos(t)$.

a) Calcul des nouvelles bornes

$$\begin{cases} t = \frac{\pi}{6} \Longrightarrow u = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ t = \frac{\pi}{3} \Longrightarrow x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

b) Calcul du dt

On sait que :

$$u = \cos(t) \Longrightarrow t = \arccos(u) \text{ car } t \in \left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right] \subset [0;\pi]$$

De plus on sait que :

$$t: u \mapsto \arccos(u) \in \mathcal{D}\left(\left[\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\right) \text{ et } \frac{dt}{du} = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$$

On en déduit donc que :

$$dt = -\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

c) On remplace tout pour obtenir une nouvelle intégrale

De plus on sait que :

$$\forall t \in \left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right], \sin(t) = \sqrt{1-\cos^2(t)} = \sqrt{1-u^2} \text{ et } \tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)} = \frac{\sqrt{1-u^2}}{u}$$

On en déduit donc que :

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin(t)+\tan(t)}dt = \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}+\frac{\sqrt{1-u^2}}{u}} \times \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{1-u^2+\frac{1-u^2}{u}}du$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{u}{-u^3-u^2+u+1}du$$

On en déduit donc que :

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin(t)+\tan(t)}dt = -\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{u}{u^3+u^2-u-1}du$$

On a donc ici :

$$\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } R(u) = -\frac{u}{u^3+u^2-u-1}$$

2) On doit factoriser le polynôme $u^3+u^2-u-1 = P(u)$

On voit que $P(1) = 0$, on peut donc factoriser P par $u-1$. On a :

$$\forall u \in \mathbb{R}, P(u) = u^3+u^2-u-1 = (u-1)(u^2+2u+1) = (u-1)(u+1)^2$$

On décompose à présent en éléments simples.

ATTENTION à la décomposition en éléments simples de :

$$\frac{1}{(u-1)(u+1)^2}$$

On peut le faire de deux façons.

On cherche a, b et c réels tels que :

$$\frac{1}{(u-1)(u+1)^2}=\frac{a}{u-1}+\frac{b}{u+1}+\frac{c}{(u+1)^2}$$

Méthode 1 : Astuce

On sait que :

$$1=\frac{1}{4}[(u+1)^2-(u^2-1)-2(u-1)]$$

On a alors :

$$\frac{1}{(u-1)(u+1)^2}=\frac{1}{4}\frac{(u+1)^2-(u^2-1)-2(u-1)}{(u-1)(u+1)^2}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}-\frac{2}{(u+1)^2}\right)$$

Méthode 2 : Comme en SI

On écrit :

$$\frac{1}{(u-1)(u+1)^2}=\frac{a}{u-1}+\frac{b}{1+u}+\frac{c}{(1+u)^2}$$

On met au même dénominateur :

$$\begin{aligned}\frac{a}{u-1}+\frac{b}{1+u}+\frac{c}{(1+u)^2}&=\frac{a(1+u)^2+b(u^2-1)+c(u-1)}{(u-1)(u+1)^2}\\&=\frac{u^2(a+b)+u(2a+c)+a-b-c}{(u-1)(u+1)^2}\end{aligned}$$

On identifie :

$$\begin{cases}a+b=0\\2a+c=0\\a-b-c=1\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{4}\\b=-\frac{1}{4}\\c=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$\frac{1}{(u-1)(u+1)^2}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}-\frac{2}{(u+1)^2}\right)$$

A présent on peut calculer l'intégrale de cette fonction rationnelle !

On a :

$$-\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{u}{u^3+u^2-u-1}du=\frac{1}{4}\left(\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{2u}{(u+1)^2}du+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{u}{u+1}du-\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{u}{u-1}du\right)$$

On calcule séparément les intégrales :

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{2u}{(u+1)^2}du=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{2u+2}{(u+1)^2}du-\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{2}{(u+1)^2}du$$

$$= [2\ln(1+u)]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \left[\frac{2}{u+1}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= 2\ln\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 2\ln\left(\frac{3}{2}\right) + 4(2-\sqrt{3}) - \frac{4}{3}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{u}{u+1}du = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{u+1}{u+1}du - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{u+1}du = \frac{\sqrt{3}-1}{2} - [\ln(1+u)]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} - \ln\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{u}{u-1}du = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{u-1}{u-1}du + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{u-1}du = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + [\ln(1-u)]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \ln\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

On en déduit donc que :

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{2u}{(u+1)^2}du + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{u}{u+1}du - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{u}{u-1}du$$

$$= 2\ln\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 2\ln\left(\frac{3}{2}\right) + 4(2-\sqrt{3}) - \frac{4}{3} + \frac{\sqrt{3}-1}{2} - \ln\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$- \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2} + \ln\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

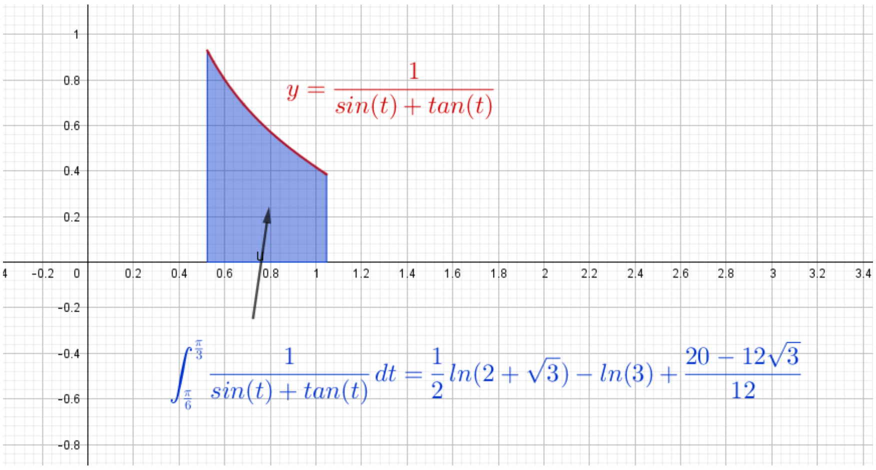
$$= \ln\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{4}{5}(\sqrt{3}-2) - \frac{4}{3}$$

$$= 2\ln(2+\sqrt{3}) - \ln(3) + \frac{20-12\sqrt{3}}{3}$$

On en déduit donc que :

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin(t)+\tan(t)}dt = \frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{3}) - \frac{1}{4}\ln(3) + \frac{20-12\sqrt{3}}{12}$$

On a la courbe suivante :



Partie D : Suites d'intégrale

Exercice D.1 : On pose :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, I_n = \int_1^e (\ln(x))^n\, dx$$

1) Montrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^1 t^n e^t dt$$

2) Donner une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n

3) Montrer que la suite $(I_n)_n$ converge et déterminer sa limite.

1) Il faut faire un changement de variable. On pose $x = e^t$.

a) Calcul des nouvelles bornes

$$\begin{cases} x = 1 \Longrightarrow t = 0 \\ x = e \Longrightarrow t = 1 \end{cases}$$

b) Calcul du dt

De plus on sait que :

$$x: t \mapsto e^t \in \mathcal{D}([0;1]) \text{ et } \frac{dx}{dt} = e^t$$

On en déduit donc que :

$$dx = e^t dt$$

c) On remplace tout pour obtenir une nouvelle intégrale

On en déduit donc que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, I_n = \int_1^e (\ln(x))^n\, dx = \int_0^1 \ln^n(e^t)\, e^t dt = \int_0^1 t^n e^t dt$$

2) On pose :

$$f_n = t \mapsto t^n e^t$$

On sait que $f_n \in \mathcal{D}([0;1])$ et :

$$\forall t \in [0;1], f'_{n+1}(t) = \left((n+1)t^n + t^{n+1}\right)e^t$$

On en déduit donc que :

$$\int_0^1 f'_{n+1}(t)dt = \int_0^1 \left((n+1)t^n + t^{n+1}\right)e^t dt = (n+1)I_n + I_{n+1}$$

De plus on sait que :

$$\int_0^1 f'_{n+1}(t)dt = f_{n+1}(1) - f_{n+1}(0) = e$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = e - (n+1)I_n$$

3) On sait que :

$$\begin{gathered} \forall t \in [0;1], 0 \le e^t \le e \\ \Longrightarrow \forall t \in [0;1], 0 \le t^n e^t \le t^n e \\ \Longrightarrow \int_0^1 0 dt \le \int_0^1 t^n e^t dt \le \int_0^1 t^n e dt \\ \Longrightarrow 0 \le I_n \le \frac{e}{n+1} \end{gathered}$$

De plus on sait que :

$$\lim_n \frac{e}{n+1} = 0$$

On en déduit d'après le théorème de gendarmes que :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$$

Exercice D.2 : On pose :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin(x)\, dx$$

1) Etablir une formule de récurrence entre I_{n+2} et I_n.
2) En déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}$, I_{2p} et I_{2p+1} sous forme de somme.

1) On sait que :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n+2}\sin(x)\,dx = [-x^{n+2}\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n+1}\cos(x)\,dx$$

$$= (n+2)\left([x^{n+1}\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin(x)\,dx\right)$$

$$= (n+2)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1} - (n+1)(n+2)I_n$$

2) On en déduit donc que :

$$I_{2p} = (2p)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p-1} - (2p)(2p-1)I_{2p-2}$$

$$= (2p)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p-1} - (2p)(2p-1)\left((2p-2)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p-3} - (2p-2)(2p-3)I_{2p-4}\right)$$

$$= (2p)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p-1} - \frac{(2p)!}{(2p-3)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p-3} + \frac{(2p)!}{(2p-4)!}I_{2p-4}$$

On en déduit donc que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, I_{2p} = \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k\frac{(2p)!}{(2p-1-2k)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p-1-2k} + (-1)^p(2p)!\,I_0$$

Or on sait que :

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,dx = 1$$

On en déduit donc que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, I_{2p} = \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k\frac{(2p)!}{(2p-1-2k)}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p-1-2k} + (-1)^p(2p)!$$

De même on a :

$$I_{2p+1} = (2p+1)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p} - (2p+1)(2p)I_{2p-1}$$

$$= (2p+1)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p} - (2p+1)(2p)\left((2p-1)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p-2} - (2p-1)(2p-2)I_{2p-3}\right)$$

$$= \frac{(2p+1)!}{(2p)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p} - \frac{(2p+1)!}{(2p-2)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p-2} + \frac{(2p+1)!}{(2p-3)!}I_{2p-3}$$

On en déduit donc que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, I_{2p+1} = \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k\frac{(2p+1)!}{(2p-2k)}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p-2k} + (-1)^p(2p+1)!\,I_1$$

Or on sait que :

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\,dx = [-x\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx = 1$$

On en déduit donc que :

$$p \in \mathbb{N}, I_{2p+1} = \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k\frac{(2p+1)!}{(2p-2k)}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p-2k} + (-1)^p(2p+1)!$$

On en déduit donc que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{2p+1} \sin(x)\, dx = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{(2p+1)!}{(2p-2k)} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p-2k}$$