Correction DS n°2

Exercice 1 : Une dérivée n-ième

On pose la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x \cos(x)$$

1) a) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) - \sin(x) = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

b) En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \sqrt{2}e^x \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

2) En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = 2e^x \cos\left(x + 2 \times \frac{\pi}{4}\right)$$

3) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall\, n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(x) = 2^{\frac{n}{2}}e^x \cos\left(x + n\frac{\pi}{4}\right)$$

4) Déterminer les valeurs de x tel que :

$$f^{(n)}(x) = 0$$

1) a) On sait que :

$$\forall (\mathrm{a}, \mathrm{b}) \in \mathbb{R}^2, \cos(\mathrm{a}+\mathrm{b}) = \cos(\mathrm{a})\cos(\mathrm{b}) - \sin(\mathrm{a})\sin(\mathrm{b})$$

On a donc :

$$\forall \mathrm{x} \in \mathbb{R}, \sqrt{2}\cos\left(\mathrm{x} + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left[\cos(\mathrm{x})\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin(\mathrm{x})\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{2}\left[\cos(\mathrm{x})\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin(\mathrm{x})\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$= \cos(\mathrm{x}) - \sin(\mathrm{x})$$

Donc :

$$\boldsymbol{\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos(x) - \sin(x)}$$

b) f est de la forme $u \times v$ donc on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x \cos(x) + e^x(-\sin)(x) = e^x(\cos(x) - \sin(x)) = \boldsymbol{\sqrt{2}e^x \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$$

2) Il suffit de dériver une f' toujours de la forme $u \times v$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = \sqrt{2}e^x \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}e^x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{2}e^x \underbrace{\left(\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right)}_{=\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= 2e^x \cos\left(2 \times \frac{\pi}{4}\right)$$

3) On raisonne par récurrence. Pour tout entier naturel n on pose la proposition P(n) suivante :

$$\boldsymbol{P(n): "\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = 2^{\frac{n}{2}}e^x \cos\left(x + n\frac{\pi}{4}\right)"}$$

Initialisation : Pour n=0 :

$$2^{\frac{0}{2}}e^x \cos\left(x + 0 \times \frac{\pi}{4}\right) = e^x \cos(x) = f(x)$$

Donc *P(0)* est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel fixé. On suppose vraie P(n). On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = 2^{\frac{n}{2}} e^x \cos\left(x + n\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n+1)}(x) = 2^{\frac{n}{2}} e^x \cos\left(x + n\frac{\pi}{4}\right) - 2^{\frac{n}{2}} e^x \sin\left(x + n\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 2^{\frac{n}{2}} e^x \left(\underbrace{\cos\left(x + n\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(x + n\frac{\pi}{4}\right)}_{\sqrt{2}\cos\left(x + n\times\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)} \right) = 2^{\frac{n+1}{2}} e^x \cos\left(x + (n+1) \times \frac{\pi}{4}\right)$$

Donc *P(n+1)* est vraie.

Conclusion : *P(0)* est vraie et *P(n)* est héréditaire donc d'après le principe de récurrence, P(n) est toujours vraie.

4) On résout :

$$f^{(n)}(x) = 0 \Leftrightarrow 2^{\frac{n}{2}} e^x \cos\left(x + n\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(x + n\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x + n\frac{\pi}{4} = \frac{(2k+1)\pi}{2} \; ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{x = k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{n\pi}{4}}$$

Exercice 2 : Limite d'un produit

1) Démontrer que :

$$\forall\, (a,b) \in \mathbb{R}^2, \forall\, n \in \mathbb{N} : a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$$

2) En déduire une factorisation de :

$$P_1(x) = x^3 - 1 \; et \; P_2(x) = x^3 + 1$$

3) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \prod_{k=0}^{n} (k^2 + k + 1) = \prod_{k=1}^{n+1} (k^2 - k + 1)$$

4) En déduire que :

$$\lim_{n \to +\infty} \prod_{k=2}^{n} \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1} = \frac{2}{3}$$

5) 5) Ecrire un programme Python qui en entrée vous demande une valeur de n (on pourra utiliser une fonction ou bien un input) et en sortie affiche dans une liste les différentes valeurs de u_n, pour n allant de 2 à n avec :

$$u_n = \prod_{k=2}^{n} \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1}$$

1) C'est du cours. Il suffit de prendre le membre de droite et de faire un télescopage :

$$\forall\, (a,b) \in \mathbb{R}^2, \forall\, n \in \mathbb{N}, (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a^{k+1} b^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k+1}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} b^{n-k} - b^{n+1} - \sum_{k=1}^{n} a^k b^{n-k+1}$$

Or on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1}b^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} a^{k}b^{n-(k-1)} = \sum_{k=1}^{n} a^{k}b^{n+1-k}$$

On en déduit donc que :

$$\forall\,(a,b) \in \mathbb{R}^2, \forall\, n \in \mathbb{N}, (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^{k}b^{n-k} = a^{n+1} - b^{n+1}$$

2) On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P_1(x) = x^3 - 1 = x^3 - 1^3 = (x-1)(x^2+x+1)$$

De même on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P_1(x) = x^3 + 1 = x^3 - (-1)^3 = (x+1)(x^2-x+1)$$

3) On a par **décalage d'indice** :

$$\prod_{k=0}^{n}(k^2+k+1) = \prod_{k=1}^{n+1}((k-1)^2+(k-1)+1) = \prod_{k=1}^{n+1}(k^2-2k+1+k) = \prod_{k=1}^{n+1}(k^2-k+1)$$

4) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1} = \prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^2-k+1)} = \prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k+1} \times \prod_{k=2}^{n}\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}$$

Or on a :

$$\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k+1} = \frac{1\times 2\times \ldots \times (n-1)}{3\times 4\times \ldots \times (n-1)\times n\times (n+1)} = \frac{2}{n(n+1)}$$

De même on a :

$$\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1} = \frac{\prod_{k=2}^{n}(k^2+k+1)}{\prod_{k=2}^{n}(k^2-k+1)} = \frac{\prod_{k=2}^{n}(k^2+k+1)}{\prod_{k=1}^{n-1}(k^2+k+1)} = \frac{n^2+n+1}{3}$$

On en déduit donc que :

$$\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1} = \frac{2}{3}\times\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}$$

Or on a :

$$\lim_{n}\frac{n^2+n+1}{n(n+1)} = \lim_{n}\frac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}} = 1$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1} = \frac{2}{3}$$

5) On a :

```python
def simul(n):
    u=[7/9]
    print(u)
    for i in range(3,n+1):
        u.append(u[-1]*(i**3-1)/(i**3+1))
        print(u)
    return u
```

Cela donne :

```
>>> simul(6)
[0.7777777777777778,
 0.7222222222222222,
 0.7,
 0.6888888888888889,
 0.6825396825396826]
```

Exercice 3 : Une bijection sur une partie de $\mathbb{C}$

On pose a$\in \mathbb{C}, tel\ que\ |a| < 1$. On pose alors la transformation suivante :

$$f_a : \begin{cases} \mathbb{C} \backslash \left\{ \frac{1}{\bar{a}} \right\} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \end{cases}$$

1) Démontrer que :

$$|z| = 1 \Leftrightarrow z \times \bar{z} = 1$$

2) Démontrer que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| = 1 \Longrightarrow |f_a(z)| = 1$$

3) Démontrer que la réciproque est vraie.
4) On définit :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$$

On pose alors :

$$g_a : \begin{cases} \mathbb{U} \to \mathbb{U} \\ z \mapsto \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \end{cases}$$

(on dit que g_a est la restriction de f_a sur $\mathbb{U}$, noté aussi : $f_a|_{\mathbb{U}}$).
Démontrer que g est bijective et en déduire une expression de g_a^{-1} en fonction de g_b où b est à déterminer.

1) On a :

$$\mathbf{|z| = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow z \times \bar{z} = 1}$$

2) On a :

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| = 1 \Longrightarrow z\bar{z} = 1$$

De plus on sait que $|a| < 1$. Donc :

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| = 1 \Longrightarrow z \neq \frac{1}{\bar{a}}$$

On a donc :

$$\forall z \in \mathbb{U}, f_a(z) \times \overline{f_a(z)} = \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \times \left(\overline{\frac{z-a}{1-\bar{a}z}} \right) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \times \frac{\bar{z}-\bar{a}}{1-a\bar{z}} = \frac{z\bar{z} - a\bar{z} - \bar{a}z + a\bar{a}}{1 - a\bar{z} - \bar{a}z + \bar{a}za\bar{z}}$$
$$= \frac{1 - a\bar{z} - \bar{a}z + a\bar{a}}{1 - a\bar{z} - \bar{a}z + a\bar{a}} \quad (car\ z\bar{z} = 1) = 1$$

Ainsi on a :

$$\forall z \in \mathbb{U}, f_a(z) \times \overline{f_a(z)} = 1$$

On en déduit donc que :

$$\mathbf{\forall z \in \mathbb{C}, |z| = 1 \Longrightarrow |f_a(z)| = 1}$$

3) On suppose que :

$$|f_a(z)| = 1$$

On a donc :

$$|f_a(z)| = 1 \Longrightarrow f_a(z) \times \overline{f_a(z)} = 1 \Longrightarrow \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \times \frac{\bar{z}-\bar{a}}{1-a\bar{z}} = 1 \Longrightarrow (z-a)(\bar{z}-\bar{a})$$
$$= (1-\bar{a}z)(1-a\bar{z})$$
$$\Longrightarrow z\bar{z} - a\bar{z} - \bar{a}z + a\bar{a} = 1 - a\bar{z} - \bar{a}z + \bar{a}za\bar{z} \Longrightarrow z\bar{z}(1-|a|^2) = 1-|a|^2 \quad (\text{car } a\bar{a} = |a|^2)$$

Or on sait que :

$$|a| < 1 \Longrightarrow 1-|a|^2 \neq 0$$

On a donc :

$$z\bar{z}(1-|a|^2) = 1-|a|^2 \Longrightarrow z\bar{z} = 1 \Longrightarrow |z| = 1$$

Donc :

$$\boldsymbol{|f_a(z)| = 1 \Longrightarrow |z| = 1}$$

La réciproque est vraie !

4) On a démontré précédemment que :

$$z \in \mathbb{U} \Leftrightarrow f_a(z) \in \mathbb{U}$$

Donc la fonction g_a est bien définie.

On va résoudre :

$$g_a(z) = z' \ avec\ z' \in \mathbb{U}$$

Ici l'inconnue est z :

$$g_a(z) = z' \Leftrightarrow \frac{z-a}{1-\bar{a}z} = z' \Leftrightarrow z(1+\bar{a}z') = a + z'$$

Or on sait que :

$$|az'| = |a||z'| = |a| < 1 \Longrightarrow \forall\, z' \in \mathbb{U}, az' \neq -1$$

On a donc :

$$z(1+\bar{a}z') = a + z' \Leftrightarrow z = \frac{a+z'}{1+\bar{a}z'}$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{\boldsymbol{\forall\, z' \in \mathbb{U}, g_a(z) = z' \Leftrightarrow z = \frac{a+z'}{1+\bar{a}z'}}}$$

On a donc :

$$\forall\, z' \in \mathbb{U}, \exists! \in \mathbb{U} \text{ tel que } g_a(z) = z'$$

Donc g_a est bijective et de plus on a démontré que :

$$\boxed{\boldsymbol{g_a^{-1} : \begin{cases} \mathbb{U} \to \mathbb{U} \\ z \mapsto \dfrac{z+a}{1+\bar{a}z} \end{cases}}}$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{\boldsymbol{g_a^{-1} = g_{-a}}}$$

Exercice 4 : Encore une somme

Soit $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$. On propose de simplifier l'écriture des fonctions suivantes :

$$\begin{cases} A_n(x) = \sum_{k=0}^{n} [\cos(kx)]^2 = \sum_{k=0}^{n} \cos^2(kx) \\ B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} [\sin(kx)]^2 = \sum_{k=0}^{n} \sin^2(kx) \end{cases}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de A_n et B_n.
Dans toute la suite on pose les fonctions suivantes :

$$s_n = A_n + B_n \; et \; d_n = A_n + B_n$$

2) Démontrer que s_n est constante et déterminer sa valeur.
3) a) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, d_n(x) = \sum_{k=0}^{n} cos(2kx)$$

b) Rappeler la formule de linéarisation de $\cos(a)\sin(b)$.
c) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, d_n(x)\sin(x) = \cos(nx)\sin\big((n+1)x\big)$$

d) En déduire la valeur de $d_n(x)$ (on pourra distinguer plusieurs cas !).
4) Déterminer les valeurs de $A_n(x) \; et \; B_n(x)$.

1) On sait que $\mathcal{D}_{cos} = \mathbb{R} \; et \; \mathcal{D}_{sin} = \mathbb{R}$ donc **A_n et B_n sont définie sur $\mathbb{R}$.**
2) On a :

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{n} \in \mathbb{N}, \mathbf{s_n}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{A}_n + \mathbf{B}_n = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{cos^2}(\boldsymbol{kx}) + \sum_{k=0}^{n} \mathbf{sin^2}(\boldsymbol{kx})$$

$$= \sum_{k=0}^{n} [\mathbf{cos^2}(\boldsymbol{kx}) + \mathbf{sin^2}(\boldsymbol{kx})] = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{1} = \mathbf{n+1}$$

Remarque : On peut aussi dériver :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \, x \in \mathbb{R}, s_n'(x) = A_n'(x) + B_n'(x) = \sum_{k=0}^{n} -2k\, cos(kx)\sin(kx) + \sum_{k=0}^{n} 2ksin(kx)\cos(kx)$$

$$= 0$$

Donc on en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, s_n'(x) = s_n'(0) = n+1$$

3) a) On a :

$$\forall \, \mathrm{n} \in \mathbb{N}, \mathrm{A}_n - \mathrm{B}_n = \sum_{k=0}^{n} \cos^2(kx) - \sum_{k=0}^{n} \sin^2(kx) = \sum_{k=0}^{n} [\cos^2(kx) - \sin^2(kx)]$$

Or on sait que :

$$\forall \, (\mathrm{a};\mathrm{b}) \in \mathbb{R}^2, \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
$$\Longrightarrow \forall \, x \in \mathbb{R}, \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

Ainsi on a:

$$\forall \, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{d_n}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A_n}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{B_n}(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=0}^{n} [\boldsymbol{cos^2}(\boldsymbol{kx}) - \boldsymbol{sin^2}(\boldsymbol{kx})] = \sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{cos}(\boldsymbol{2kx})$$

Remarque : On peut aussi faire une récurrence. C'est plus long mais cela fonctionne !

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) = "d_n(x) = \sum_{k=0}^{n} cos(2kx)"$$

Initialisation : $n = 0$
On a :

$$\begin{cases} d_0(x) = A_0(x) - B_0(x) = 1 \\ \sum_{k=0}^{0} cos(2kx) = \cos(0) = 1 \end{cases}$$

Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : Soit n un entier naturel fixé. On suppose vrai $\mathcal{P}(n)$. On a alors :

$$d_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} [cos^2(kx) - sin^2(kx)] = d_n(x) + \underbrace{\cos^2\big((n+1)x\big) - \sin^2\big((n+1)x\big)}_{=\cos(2(n+1)x)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} cos(2kx) + \cos(2(n+1)x) = \sum_{k=0}^{n+1} cos(2kx)$$

Donc la propriété est héréditaire.
Conclusion : On conclut d'après le principe de récurrence.

b) On a :

$$\cos(a)\sin(b) = \frac{1}{2}[\sin(a+b) - \sin(a-b)]$$

c) On sait que :

$$\forall \text{ x} \in \mathbb{R}, \mathrm{d_n}(x)\sin(x) = \left[\sum_{k=0}^{n} cos(2kx)\right]\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} cos(2kx)\sin(x)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}[(\sin((2k+1)x) - \sin\big((2k-1)x\big)]$$

C'est une somme télescopique :

$$\sum_{k=0}^{n}[(\sin((2k+1)x) - \sin\big((2k-1)x\big)] = \sin\big((2n+1)x\big) - \sin(-x)$$

$$= \sin\big((2n+1)x\big) + \sin(x)$$

On en déduit donc que :

$$\forall \text{ x} \in \mathbb{R}, \mathrm{d_n}(x)\sin(x) = \frac{1}{2}\left[\sin\big((2n+1)x\big) + \sin(x)\right] = \frac{1}{2} \times 2 \times \sin\left(\frac{2n+2}{2}x\right)\cos\left(\frac{2n}{2}x\right)$$

On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{\forall \text{ x} \in \mathbb{R}, d_n(x)\sin(x) = \cos(nx)\sin\big((n+1)x\big)}$$

d) On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{\forall \text{ x} \in \mathbb{R}, \forall \text{ n} \in \mathbb{N}, \mathrm{A}_n(\mathrm{x}) - \mathrm{B}_n(\mathrm{x}) = \sum_{k=0}^{n} \cos(2kx) = \begin{cases} n+1 \; si \; x \equiv 0[\pi] \\ \cos(nx)\dfrac{\sin\big((n+1)x\big)}{\sin(x)} \end{cases}}$$

4) Il suffit de voir que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} A_n + B_n = n+1 \\ A_n(x) - B_n(x) = \begin{cases} n+1 \text{ si } x \equiv 0[\pi] \\ \cos(nx)\dfrac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)} \end{cases} \end{cases}$$

1er cas : SI $x \equiv 0[\pi]$

On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} A_n + B_n = n+1 \\ A_n - B_n = n+1 \end{cases}$$

$$\boxed{\Longrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{A_n = n+1} \\ \boldsymbol{B_n = 0} \end{cases}}$$

Remarque : Cela est logique car :

$$x \equiv 0[\pi] \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in [\![0;n]\!], \sin^2(kx) = 0 \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, B_n = \sum_{k=0}^{n} \sin^2(kx) = 0$$

Et de plus :

$$x \equiv 0[\pi] \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in [\![0;n]\!], \cos^2(kx) = 1 \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, A_n = \sum_{k=0}^{n} \cos^2(kx) = n+1$$

2ième cas : SI $x \not\equiv 0[\pi]$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} A_n + B_n = n+1 \\ A_n - B_n = \cos(nx)\dfrac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)} \end{cases}$$

$$\boxed{\Longrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{A_n = \dfrac{n+1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos(nx)\dfrac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)}} \\ \boldsymbol{B_n = \dfrac{n+1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos(nx)\dfrac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)}} \end{cases}}$$

Problème 1 : Une petite égalité

Le but de ce problème est d'exprimer plus simplement la fonction suivante :

$$f : x \mapsto Arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$$

Partie A : Etude classique de fonction

On pose :

$$h : x \longmapsto \frac{2x}{1+x^2}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de h.
2) Etudier la parité ou l'imparité de h.
3) Etudier la limite de h en $+\infty$. Quelle conséquence graphique pouvez-vous observer pour $\mathcal{C}_h$?

4) Déterminer les variations de la fonction h sur [0 ;+∞[et en déduire le tableau de variations de h sur son ensemble de définition.

Partie B : Simplification de f

1) Rappeler l'ensemble de définition de la fonction arcsin.
2) En déduire que f est définie sur $\mathbb{R}$.
3) Démontrer que :

$$\forall\theta \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, \sin(2\theta) = \frac{2\tan(\theta)}{1+\tan^2(\theta)}$$

4) a) Démontrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \exists!\ \theta_x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $x = \tan(\theta_x)$

b) En déduire que :

$$\forall\, x \in [0;1], f(x) = 2\arctan(x)$$

c) Démontrer que :

$$\forall x \in [1;+\infty[, f(x) = \pi - 2\arctan(x)$$

5) a) Rappeler l'ensemble de dérivabilité de $arcsin$.

b) Calculer :

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x)\ \ et\ \lim_{x\to 1^+} f'(x)$$

c) Tracer la représentation graphique de f, notée $\mathcal{C}_f$, sur $\mathbb{R}$. On fera apparaître les éventuelles points de $\mathcal{C}_f$ où la fonction n'est pas dérivable.

6) On pose de même :

$$g: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \text{Arccos}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right) \end{cases}$$

Déterminer une écriture plus simple de g puis en déduire sa courbe.

Partie A :

1) h est définie si et seulement si $1+x^2 \neq 0$. Or on sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 1+x^2 \geq 1 > 0$$

On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{\mathcal{D}_h = \mathbb{R}}$$

2) On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = \frac{2(-x)}{1+(-x)^2} = -\frac{2x}{1+x^2} = -h(x)$$

On en déduit donc que **<u>h est impaire</u>**.

3) On a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{1+x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = 0\ car\ \lim_{x\to+\infty} x\left(1+\frac{1}{x}\right) = +\infty$$

On en déduit donc que **<u>$\mathcal{D}_h$ admet une asymptote horizontale en $+\infty$</u>** (et en $-\infty$ par imparité) d'équation $\boldsymbol{y = 0}$.

4) On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = 2\frac{(1+x^2)-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

On en déduit donc le tableau de signe et de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	↗	1	↘	0

Par imparité on obtient :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f	0	↘	-1	↗	0	↗	1	↘	0

Partie B : Simplification de f

1) On a :

$$\mathcal{D}_{arcsin} = [-1;1]$$

2) D'après l'étude des variations de h effectuée dans la partie A, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) \in [-1;1]$$

On en déduit donc que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

3) On a :

$$\forall \theta \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, \frac{2\tan(\theta)}{1+\tan^2(\theta)} = \frac{\frac{2\sin(\theta)}{\cos(\theta)}}{1+\left(\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}\right)^2} = 2\times\frac{\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}}{[\cos(\theta)]^2+[\sin(\theta)]^2}\times[\cos(\theta)]^2$$

$$= 2\sin(\theta)\,cos(\theta)$$

Or on sait que :

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a) \Longrightarrow \sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$$

On en déduit donc que :

$$\forall \theta \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, \sin(2\theta) = \frac{2\tan(\theta)}{1+\tan^2(\theta)}$$

4) a) On sait que tangente est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. De plus :

$$\lim_{\begin{cases} x\to\frac{\pi}{2} \\ x<\frac{\pi}{2}\end{cases}} \tan(x) = +\infty \text{ et } \lim_{\begin{cases} x\to\frac{\pi}{2} \\ x<\frac{\pi}{2}\end{cases}} \tan(x) = -\infty$$

D'après le théorème de la bijection, tan réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.

Donc :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \exists!\ \theta_x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\ tel\ que\ x = tan(\theta_x)$$

On a alors :

$$\theta_x = \arctan(x)$$

b) On a :

$\forall x \in \mathbb{R}, \exists!\ \theta_x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\ tel\ que\ x = tan(\theta_x)$

On a donc :

$$f(x) = arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = arcsin\left(\frac{2\,tan(\theta_x)}{1+(tan(\theta_x))^2}\right) = \arcsin(\sin(2\theta_x))$$

Or on sait que arcsin est la fonction réciproque de sinus, restreint sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Or on a :

$$\forall\theta_x \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right], \tan(\theta_x) = x \in [0;1]$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in [0;1], \exists!\,\theta_x \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right]\ tel\ que\ x = \tan(\theta_x)$$

On a donc :

$$\forall x \in [0;1] \Longrightarrow\ 2\theta_x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right] \Longrightarrow \arcsin(\sin(2\theta_x))\ = 2\theta_x = 2\arctan(x)$$

On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{\forall x \in [0;1], f(x) = 2\arctan(x)}$$

c) On a :

$$\forall x \in [1;+\infty[, \begin{cases}\tan(\theta_x) = x\\ \theta_x \in \left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\end{cases} \Longrightarrow \theta_x \in \left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[\ \Longrightarrow 2\theta_x \in \left[\frac{\pi}{2};\pi\right[\Longrightarrow \pi - 2\theta_x \in \left]-\frac{\pi}{2};0\right]$$

On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{\forall x \in [1;+\infty[, f(x) = \arcsin(\sin(2\theta_x)) = \arcsin(\sin(\pi - 2\theta_x)) = \pi - 2\theta_x = \pi - 2\arctan(x)}$$

5) a) On sait que arcsin est définie sur $[-1;1]$ mais dérivable sur $]-1;1[$.

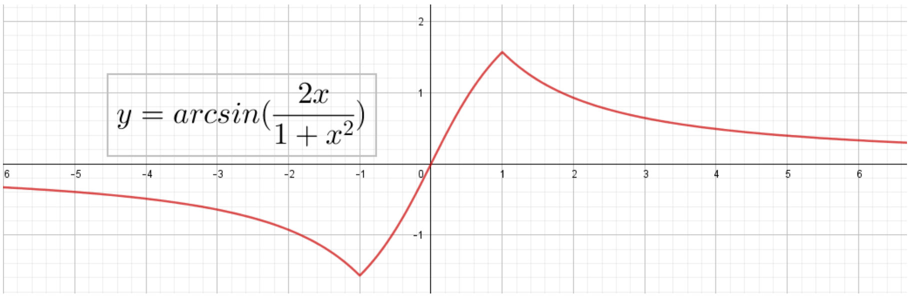
b) On a :

$$\forall x \in [0;1[, f'(x) = \frac{2}{1+x^2} \Longrightarrow \boldsymbol{\lim_{x\to 1^-} f'(x) = 1}$$

De même on a :

$$\forall x \in]1;+\infty[, f'(x) = \frac{-2}{1+x^2} \Longrightarrow \boldsymbol{\lim_{x\to 1^+} f'(x) = -1}$$

c) On a donc :



6) On a :

$$\forall\theta \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, \frac{1-\tan^2(\theta)}{1+\tan^2(\theta)} = \frac{1-\frac{\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)}}{1+\frac{\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)}} = \frac{\frac{\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)}}{\frac{\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)}} = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$$
$$= \cos(2\theta)$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on effectue le changement de variable suivant :

$$x = \tan(\theta_x), \theta_x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$$

On a donc :

$$g(x) = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = \arccos\left(\frac{1-\tan(\theta_x)^2}{1+\tan(\theta_x)^2}\right) = \arccos(\cos(2\theta_x))$$

Or on sait que :

$$\forall \theta \in [0;\pi], \arccos(\cos(\theta_x)) = \theta_x$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \geq 0, \theta_x = \arctan(x) \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[\implies 2\theta_x \in [0;\pi[\implies \arccos(\cos(2\theta_x)) = 2\theta_x = 2\arctan(x)$$

Par parité de la fonction g, on en déduit que :

$$\forall x \leq 0, g(x) = g(-x) = 2\arctan(-x) = -2\arctan(x)$$

On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 2\arctan(|x|)}$$

On a donc la courbe suivante :