DS n°2, PCSI 2024-2025
12 octobre 2023

Exercice 1 : Une dérivée n-ième

On pose la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x \cos(x)$$

1) a) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) - \sin(x) = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

b) En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \sqrt{2}e^x \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

2) En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = 2e^x \cos\left(x + 2 \times \frac{\pi}{4}\right)$$

3) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall\, n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(x) = 2^{\frac{n}{2}} e^x \cos\left(x + n\frac{\pi}{4}\right)$$

4) Déterminer les valeurs de x tel que :

$$f^{(n)}(x) = 0$$

Exercice 2 : Limite d'un produit

1) Démontrer que :

$$\forall\, (a,b) \in \mathbb{R}^2, \forall\, n \in\ \mathbb{N} : a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$$

2) En déduire une factorisation de :

$$P_1(x) = x^3 - 1 \text{ et } P_2(x) = x^3 + 1$$

3) Démontrer que :

$$\prod_{k=0}^{n}(k^2 + k + 1) = \prod_{k=1}^{n+1}(k^2 - k + 1)$$

4) En déduire que :

$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=2}^{n} \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1} = \frac{2}{3}$$

5) Ecrire un programme Python qui en entrée vous demande une valeur de n (on pourra utiliser une fonction ou bien un input) et en sortie affiche dans une liste les différentes valeurs de u_n, pour n allant de 2 à n avec :

$$u_n = \prod_{k=2}^{n} \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1}$$

Exercice 3 : Une bijection sur une partie de $\mathbb{C}$

On pose a$\in \mathbb{C}, tel\ que\ |a| < 1$. On pose alors la transformation suivante :

$$f_a : \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \left\{\dfrac{1}{\bar{a}}\right\} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z} \end{cases}$$

1) Démontrer que :

$$|z| = 1 \Leftrightarrow z \times \bar{z} = 1$$

2) Démontrer que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| = 1 \Longrightarrow |f_a(z)| = 1$$

3) Démontrer que la réciproque est vraie.

4) On définit :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$$

On pose alors :

$$g_a : \begin{cases} \mathbb{U} \to \mathbb{U} \\ z \mapsto \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z} \end{cases}$$

(on dit que g_a est la restriction de f_a sur $\mathbb{U}$, noté aussi : $f_a|_{\mathbb{U}}$).
Démontrer que g est bijective et en déduire une expression de g_a^{-1} en fonction de g_b où b est à déterminer.

Exercice 4 : Calcul de somme à l'aide de somme !

Soit $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$. On propose de simplifier l'écriture des fonctions suivantes :

$$\begin{cases} A_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} [\cos(kx)]^2 = \sum_{k=0}^{n} \cos^2(kx) \\ B_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} [\sin(kx)]^2 = \sum_{k=0}^{n} \sin^2(kx) \end{cases}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de A_n et B_n.
Dans toute la suite on pose les fonctions suivantes :

$$s_n = A_n + B_n\ et\ d_n = A_n - B_n$$

2) Démontrer que s_n est constante et déterminer sa valeur.

3) a) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, d_n(x) = \sum_{k=0}^{n} cos(2kx)$$

b) Rappeler la formule de linéarisation de $\cos(a)\sin(b)$.

c) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, d_n(x)\sin(x) = \cos(nx)\sin\big((n+1)x\big)$$

d) En déduire la valeur de $d_n(x)$ (on pourra distinguer plusieurs cas !).

4) Déterminer les valeurs de $A_n(x)\ et\ B_n(x)$.

Problème 1 : Tracer une fonction compliquée

Le but de ce problème est d'exprimer plus simplement la fonction suivante :

$$f : x \mapsto Arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$$

Partie A : Etude classique de fonction

On pose :

$$h : x \longmapsto \frac{2x}{1+x^2}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de h.

2) Etudier la parité ou l'imparité de h.

3) Etudier la limite de h en $+\infty$. Quelle conséquence graphique pouvez-vous observer pour $\mathcal{C}_h$?

4) Déterminer les variations de la fonction h sur $[0\,;+\infty[$ et en déduire le tableau de variations de h sur son ensemble de définition.

Partie B : Simplification de *f*

1) Rappeler l'ensemble de définition de la fonction arcsin.

2) En déduire que f est définie sur $\mathbb{R}$.

3) Démontrer que :

$$\forall \theta \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, \sin(2\theta) = \frac{2\tan(\theta)}{1+\tan^2(\theta)}$$

4) a) Démontrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \exists!\ \theta_x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $x = \tan(\theta_x)$

b) En déduire que :

$$\forall\, x \in [0;1], f(x) = 2\arctan(x)$$

c) Démontrer que :

$$\forall x \in [1;+\infty[, f(x) = \pi - 2\arctan(x)$$

5) a) Rappeler l'ensemble de dérivabilité de $arcsin$.

b) Calculer :

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) \ \ et \ \lim_{x\to 1^+} f'(x)$$

c) Tracer la représentation graphique de f, notée $\mathcal{C}_f$, sur $\mathbb{R}$. On fera apparaître les éventuelles points de $\mathcal{C}_f$ où la fonction n'est pas dérivable.

6) On pose de même :

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \mathrm{Arccos}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right) \end{cases}$$

Déterminer une écriture plus simple de g puis en déduire sa courbe.