Programme de Colle n°9
PCSI 2024-2025
(25 novembre au 29 novembre)

Chapitre 8 – Primitives

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Calcul de primitives	
Primitives d'une fonction définie sur un intervalle à valeurs complexes. Lien entre intégrales et primitives.	Description de l'ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle connaissant l'une d'entre elles. On rappelle sans démonstration que, pour une fonction continue f, $x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ a pour dérivée f. On pourra noter $\int^{x} f(t)\mathrm{d}t$ une primitive générique de f.
Calcul des primitives, application au calcul d'intégrales.	Primitives de $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$, application aux primitives de $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$.
Primitives des fonctions exponentielle, logarithme, puissances, trigonométriques et hyperboliques, et des fonctions $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.	Les étudiants doivent savoir calculer les primitives de fonctions du type $x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$ et reconnaître les dérivées de fonctions composées.
Intégration par parties, changement de variable.	Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.

Questions de cours :

Application III.a.3 : Déterminer :

$$\int \arctan(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

Application III.b.4 : Déterminer :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^2+b^2}$$

Application IV.a.4 **:** Déterminer une primitive de :

$$g : x \longmapsto \frac{2x+1}{x(1+x)^2}$$

Exercices Types

Exercice B.2 : A l'aide d'un changement de variable, déterminer une primitive des fonctions suivantes et préciser le domaine de validité :

$1.\ f_1 : x \mapsto \dfrac{x^7}{(x^4+1)^2}$ $\quad 2.\ f_2 : x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)}$ $\quad 3.\ f_3 : x \mapsto \dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$ $\quad 4.\ f_4 : x \mapsto e^{\sqrt{x}}$

$5.\ f_5 : x \mapsto \dfrac{1}{e^x(1+e^x)}$ $\quad 6.\ f_6 : x \mapsto \dfrac{3}{x}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ $\quad 7.\ f_7 : x \mapsto \dfrac{1}{\tan(x)+1}$

Exercice C.2 : Calculer :

$$I_1 = \int_0^2 \frac{1}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$$

Exercice C.3 : On cherche à calculer :

$$I_1 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin(t)+\tan(t)}\,\mathrm{d}t$$

1) En effectuant le changement de variable $u = \cos(t)$, montrer que l'on peut écrire :

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} R(u)\mathrm{d}u \ \text{ avec R une fraction rationnelle.}$$

2) En déduire la valeur de l'intégrale I.