

Fiche TD 10 : Système linéaire et calcul matriciel

Partie A : Système linéaire

Exercice A.1 : Résoudre les systèmes linéaires suivants

$$\begin{aligned} (S_1): \begin{cases} x + 2y = 3 \\ x - 4y = 6 \end{cases} \quad (S_2): \begin{cases} -3x + 4y = 6 \\ 6x - 8y = -12 \end{cases} \quad (S_3): \begin{cases} -2x + y = 5 \\ 2x - y = -6 \end{cases} \\ (S_4): \begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ x - y - z = 1 \\ x + z = 3 \end{cases} \quad (S_5): \begin{cases} 3x + 4y + z + 2t = 3 \\ 6x + 8y + 2z + 6t = 7 \\ 9x + 12y + 3z + 10t = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice A.2 : L'espace est rapporté à $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- 1) On considère dans l'espace trois points $A(-1; 2; 1)$, $B(1, -6, -1)$ et $C(2, 2, 2)$. Donner un système d'équations paramétriques du plan $(\mathcal{P})$ défini par les points A, B, C puis une équation cartésienne de $(\mathcal{P})$.
- 2) Même question avec les points $A'(1, 1, 1)$, $B'(1, 2, 3)$ et $C'(4, 0, 0)$.
- 3) On considère la droite $(\mathcal{D}) : \begin{cases} x + y - 3z = -6 \\ -2x - 4y + 3z = -1 \end{cases}$. Donner une écriture paramétrique de $(\mathcal{D})$.

Exercice A.3 : L'espace est rapporté à $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Discuter suivant les valeurs de $m \in \mathbb{R}$, l'intersection de la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $\begin{cases} mx + 2y - 3z = 3 \\ (m-1)x + my + z = 1 \end{cases}$ et du plan d'équation $(m+1)x + my + (m-1)z = m-1$.

Exercice A.4 : Soient les droites du plan cartésien d'équation $(AB): x - 2y + 3 = 0$, $(AC): 2x - y - 3 = 0$ et $(BC): x + 2y + 1 = 0$.

Quelles sont les coordonnées des points A, B et C ?

Exercice A.5 : Déterminer une équation du plan de l'espace parallèle à l'axe (Ox) , passant par les points $A(0, 1, 2)$ et $B(2, -1, 0)$.

Partie B : Matrice échelonnée

Exercice B.1 : Déterminer la matrice échelonnée réduite par lignes équivalente par lignes aux matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & -5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & -8 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice B.2 : Résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{aligned} 1) \begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ x - y - z = 1 \\ x + z = 3 \end{cases}, 2) \begin{cases} 2x - 3y + 6z + 2t = 5 \\ y - 2z + t = 1 \\ z - 3t = 2 \end{cases}, 3) \begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ 2x + y + z = -1 \\ x + 11y - z = 5 \end{cases} \\ 4) \begin{cases} x + y - z + t = 2 \\ 2x - 2y + z - 2t = 1 \\ -x + y + z - 2t = -2 \end{cases}, 5) \begin{cases} 3x + y + z + 2t = 3 \\ 6x + 8y + 2z + 6t = 7 \\ 9x + 12y + 3z + 10t = 0 \end{cases}, 6) \begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ 3x - y + t = 3 \\ 4x - 3y + z + 2t = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice B.3 : Déterminer les valeurs de m réels pour lesquelles le système suivant, donné sous forme matricielle, admet des solutions non nulles. Donner alors les solutions sous forme paramétrique et géométrique :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1+m & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1+m & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1+m & 0 \end{array} \right)$$

Exercice B.4 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes suivants, en discutant suivant les valeurs des paramètres a et b ou m .

$$1) \begin{cases} 2x + y - 3z = a \\ 3x + 2y + z = a + 3 \\ 7x + 4y - 5z = 2a + 5 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} mx + y + z + t = 1 \\ x + my + z + t = m \\ x + y + mz + t = m + 1 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x - my + m^2z = m \\ mx - m^2y + mz = 1 \\ mx + y - m^3z = 1 \end{cases}$$

Exercice B.5 : Soit $k \in \mathbb{R}$. Trouver les solutions (x, y, z) du système dont la matrice est A et le second membre est B avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & k \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ k + 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On précisera dès que possible le rang du système et le nombre de solutions, en fonction de k .

Exercice B.6 : Résoudre le système suivant d'inconnues complexes :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \dots + 2x_n = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + 3x_n = 1 \\ \vdots \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + nx_n = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, L_i : \sum_{k=1}^n \min(i, k) x_k = 1$$

Exercice B.7 : Soient $A_1, \dots, A_n$ des points du plan complexe. Déterminer à quelles conditions il existe au moins un polygone à n sommets $M_1(z_1), \dots, M_n(z_n)$ tel que A_i est le milieu de $[M_i M_{i+1}]$ et A_n est le milieu de $[A_n A_1]$.

Exercice B.8 : Résoudre le système suivant, où a, b et c sont trois réels deux à deux distincts et d un réel quelconque.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases}$$

Exercice B.9 : Trouver suivant la valeur de $a \in \mathbb{C}$, l'ensemble des solutions du système suivant :

$$\begin{cases} ax_1 = x_2 + 1 \\ ax_2 = x_3 + 1 \\ \vdots \\ ax_{n-1} = x_n + 1 \\ ax_n = x_1 + 1 \end{cases}$$