

Chapitre 11 : Les Equations différentielles linéaires

Partie A : Le premier ordre

Dans tout ce cours I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On considère de plus a un réel et b une fonction continue de I dans $\mathbb{K}$. $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$.

I) Equation différentielle du premier ordre

a) Généralités

Définition : Soit $(a, b) \in (\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}))^2$. On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre l'équation :

$$(E): y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$$

Remarque : On peut trouver en physique, chimie, SI, d'autres notations :

$$(E): \frac{dx}{dt} + a(t)x(t) = b(t) \quad (E): \dot{x}(\theta) + a(\theta)x(\theta) = b(\theta) \quad \text{ou} \quad (E): y' + ay = b$$

Définition : On dit que $f: I \rightarrow \mathbb{K}$ est solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si :

$$\forall x \in I, f'(t) + a(t)f(t) = b(t)$$

Exemple I.a.1 : On pose :

$$(E): y'(t) + (1+t)y(t) = t^2 + t + 1$$

Montrer que :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}-t-5} + t \end{cases}$$

est solution de (E).

b) Résolution de l'équation homogène

Définition : On appelle équation différentielle linéaire homogène du premier ordre l'équation :

$$(E_0): y'(t) + a(t)y(t) = 0$$

Propriété I.b.1 : Les solutions de $(E_0): y' + ay = 0$ sont :

$$f: t \mapsto \lambda e^{-A(t)}$$

Où A est une primitive de a sur I .

Remarque : On note :

$$S_0 = \{t \in I \mapsto \lambda e^{-A(t)}; \lambda \in \mathbb{K}\}$$

Exemple I.b.2 : Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$(E_1): y' + 3y = 0 ; (E_2): y'(t) + (1+t)y(t) = 0 \quad (E_3): y'(t) - \frac{1}{1+t^2}y(t) = 0$$

Application I.b.3 : 1) Résoudre $y' + y = 0$ puis dessiner une allure de l'ensemble des courbes solutions.
2) Trouver l'unique solution de cette équation vérifiant $y(0) = 2$.

Propriété I.b.4 : Soit $(E_0): y' + ay = 0$ et S_0 l'ensemble de ses solutions. On a alors :

- $\forall (f, g) \in (S_0)^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \lambda f + \mu g \in S_0$
- Il y a une unique solution qui s'annule sur I , c'est la solution nulle.
- Toutes les solutions sont proportionnelles, on dit que la dimension de S_0 est 1.

Remarque : Si on a une équation homogène du type $ay' + by = 0$, on se ramène à une équation du type précédent en divisant par la fonction a là où elle n'est pas nulle !!

Application I.b.5 : Résoudre l'équation $(E_0): \sin(t) y'(t) - \cos(t) y(t) = 0$ sur $I =]0; \pi[$

Application I.b.6 : Résoudre $2ty' - y = 0$

II) Résolution avec second membre

a) Solution particulière

Propriété II.a.1 : Soit $(E): y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$ une équation différentielle linéaire du premier ordre. Alors toute solution de (E) s'obtient en ajoutant à une solution particulière y_p de (E) une solution de l'équation homogène associée (E_0) . Ainsi l'ensemble des solutions de (E) satisfait :

$$S = y_p + S_0$$

Exemple II.a.2 : Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$(E_1): y' + 3y = 12 \quad (E_2): y'(t) + (1+t)y(t) = t^2 + t + 1 \quad (E_3): (1+x^2)y'(x) + y = 1$$

Remarque : Il est parfois difficile de trouver une solution particulière. On va voir ici plusieurs techniques pour les déterminer.

b) Principe de superposition

Propriété II.b.1 : Soit $(a, b_1, b_2) \in (C^0(I, \mathbb{K}))^3$. Si f_1 est solution sur I de $y' + ay = b_1$ et f_2 est solution sur I de $y' + ay = b_2$ alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda f_1 + \mu f_2$ est solution sur I de :

$$y' + ay = \lambda b_1 + \mu b_2$$

Application II.b.2 : Résoudre l'équation :

$$\frac{dy}{dx} - y = \cos(x) + x$$

c) Produit d'un polynôme et d'une exponentielle

Propriété II.b.3 : Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et P une fonction polynômiale à coefficient dans $\mathbb{K}$. On pose :

$$y' + \lambda y = e^{\mu t} P(t)$$

Alors l'équation a une solution particulière de la forme $t \mapsto e^{\mu t} t^m Q(t)$ où Q et P ont le même degré et m peut prendre deux valeurs :

$$\begin{cases} m = 0 & \text{si } \lambda + \mu \neq 0 \\ m = 1 & \text{si } \lambda + \mu = 0 \end{cases}$$

Application II.b.4 : Résoudre : $y' + y = 4\cosh(t)$

c) Principe de variation de la constante

Propriété II.c.1 : Soit $(E): y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$ une équation différentielle linéaire du premier ordre.

- Les solutions de l'équation homogène sont du type $t \mapsto \lambda e^{-A(t)}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$
- Les solutions de l'équation complète sont du type $t \mapsto \lambda(t) e^{-A(t)}$ avec $\lambda \in C^1(I, \mathbb{K})$

Remarque : On peut utiliser la propriété précédente pour chercher une solution particulière de l'équation différentielle.

A retenir (Méthode de la variation de la constante) :

1) On résout l'équation homogène $y'(t) + a(t)y(t) = 0$: $t \mapsto \lambda e^{-A(t)}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$

2) On pose $y_p(t) = \lambda(t) e^{-A(t)}$ solution particulière avec $\lambda \in C^1(I, \mathbb{K})$ et on trouve $\lambda \in C^1(I, \mathbb{K})$ avec l'équation :

$$\lambda'(t) e^{-A(t)} = b(t)$$

Application II.c.2 : Résoudre :

$$(1+t)y' - ty + 1 = 0 \text{ sur } I =]-1; +\infty[$$

III) Conditions initiales et raccordement

a) Problème de Cauchy

Définition : Soit $(E): y' + ay = b$ une équation différentielle sur I . Le problème de Cauchy associée au couple (t_0, y_0) où $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$ est la recherche des solutions y de (E) vérifiant la condition initiale (ou condition de Cauchy) : $y(t_0) = y_0$.

Propriété III.a.1 : Pour tout couple $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$ le problème de Cauchy associée au couple (t_0, y_0) admet une unique solution donnée par :

$$y(t) = e^{-A(t)} \left(y_0 + \int_{t_0}^t e^{A(u)} b(u) du \right)$$

Exemple III.a.2 : Résoudre sur $]0; +\infty[$ le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' - \frac{1}{2x}y = \sqrt{x} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

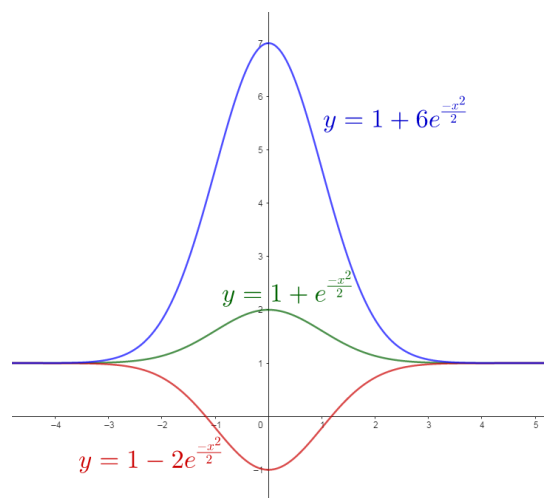
Propriété III.a.3 : Soit $(E): y' + ay = b$ une équation différentielle sur I .

- Une seule courbe solution définie sur I passe par le point $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$
- Deux solutions distinctes ont leur courbe représentative qui ne peut se couper.

Exemple III.a.4 : Voici quelques solutions à l'équation différentielle : $y' + xy = x$

Application III.a.5 (Ultra rapide) : Résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' - \sqrt{3 + \arctan(x^2 + 1)} y = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$



b) Problème de raccordements

Remarque : Lorsque l'on cherche à résoudre une équation différentielle du type $(E): a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$, il faut faire attention aux lieux où a s'annule. Ainsi on ne peut résoudre cette équation que sur des intervalles où a ne s'annule pas. Mais on peut pourtant prolonger certaines de ces solutions.

Exemple III.b.1 : Résoudre $ty'(t) - 2y(t) = t^3$ sur $\mathbb{R}$

Exemple III.b.2 : $(1-t)y'(t) - y(t) = t$ sur $\mathbb{R}$