Fiche TD 12
Rudiment d'arithmétique

Partie A : Diviseurs et multiples

Exercice A1 : Démontrer que :

$$\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$$

Exercice A2 : Soit $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$ tels que $\sqrt{a} \notin \mathbb{Q}$ et $\sqrt{b} \notin \mathbb{Q}$. Montrer que $\sqrt{a} + \sqrt{b} \notin \mathbb{Q}$

Exercice A.1 : Soit n un entier naturel non nul. Déterminer la division euclidienne de 7n+16 par 2n+3.

Exercice A.2 : Soit n un entier naturel non nul. Déterminer la division euclidienne de 7n+16 par 2n+3.

Exercice A.3 : La différence de deux entiers naturels est 538. Si l´on divise l´un par l´autre, le quotient est 13 est le reste est 34. Déterminer ces deux nombres.

Exercice A.4 : Soit $(a_0; a_1; \dots; a_n) \in [\![0; 9]\!]^{n+1}$. On pose :

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_0} = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots + a_1 \times 10 + a_0$$

Démontrer que :

$$3 | \overline{a_n a_{n-1} \dots a_0} \Leftrightarrow 3 | \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Exercice A.5 : Montrer que :

$$a_n = \frac{21n - 3}{4} \text{ et } b_n = \frac{15n - 2}{4}$$

Ne sont pas simultanément dans $\mathbb{Z}$

Partie B : PPCM et PGCD

Exercice B.1 : Calculer $9100 \wedge 1848$ et $9100 \vee 1848$

Exercice B.2 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $(n^3 + 2n) \wedge (n^4 + 3n^2 + 1)$ et $(n^3 + 2n) \vee (n^4 + 3n^2 + 1)$

Exercice B.3 : a) Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tels que s on divise 4373 et 826 par n, on obtient respectivement 8 et 7 pour restes.
b) Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tels que s on divise 6381 et 3954 par n, on obitent respectivement 9 et 6 pour restes.

Exercice B.4 : On considère trois entiers naturels n,p ,q avec $n \geq 2$ *et* $q > 0$.
1) On écrit la division euclidienne de p par q sous la forme $p = aq + r$. Montrer que la division euclidienne de $n^p - 1$ par $n^q - 1$ est :

$$n^p - 1 = \left(\sum_{k=0}^{a-1} n^{kq+r} \right) (n^q - 1) + (n^r - 1)$$

2) En déduire $(n^p - 1) \wedge (n^q - 1)$ en fonction de n et $p \wedge q$.

Exercice B.5 : 1) Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, pour tout $\lambda \in \mathbb{N}$, $(\lambda a) \wedge (\lambda b) = \lambda(a \wedge b)$.
2) En déduire que pour tout $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, pour tout $\lambda \in \mathbb{N}$, $(\lambda a) \vee (\lambda b) = \lambda(a \vee b)$

Exercice B.6 : Chercher les couples d'entiers (a, b) tels que :

$$\begin{cases} a \wedge b = 42 \\ a \vee b = 1680 \end{cases}$$

Exercice B.9 : Déterminer les entiers b naturels non nuls tels que $28 \vee b = 140$

Partie C : Nombres premiers

Exercice C.1 : Soit $(a, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, soit p un nombre premier. Montrer que :

$$p|a^n \Longrightarrow p^n|a^n$$

Exercice C.2 : Soit $(a, b, c, k) \in (\mathbb{N}^*)^4$. Montrer que :

$$\begin{cases} ab = c^k \\ a \wedge b = 1 \end{cases} \Longrightarrow \exists(\alpha, \beta) \in (\mathbb{N}^*)^2, \text{tels que } \begin{cases} a = \alpha^k \\ b = \beta^k \end{cases}$$

Exercice C.3 (petit théorème de Fermat) :

1) Montrer que :

$$\forall\, p \in \mathcal{P}, \forall k \in [\![1; p-1]\!], p| \binom{p}{k}$$

2) En déduire que :

$$\forall\, n \in \mathbb{Z}, p|(n^p - n)$$

3) a) Montrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{Z}, 42|(n^7 - n)$$

b) Montrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{Z}, \frac{n^7}{7} + \frac{n^5}{5} + \frac{23n}{35} \in \mathbb{Z}$$

Exercice C.4 : On suppose qu'il existe un nombre fini d'entiers premiers de la forme $4n - 1$ où $n \geq 1$. On les note $p_1, \dots, p_N$ et on forme le nombre $4p_1 \times \dots \times p_N - 1$. Montrer que ce nombre admet nécessairement un diviseur premier de la forme $4n - 1$, et en déduire une contradiction. Conclure.

Exercice C.5 : Soit $n \in \mathbb{N}^*, n = p_1^{\alpha_1} \times \dots \times p_r^{\alpha_r}$ sa décomposition en produit de facteurs premiers.

1) Calculer le nombre de diviseurs positifs de n.
2) Calculer la somme S(n) des diviseurs positifs de n.
3) Montrer que si m et n sont premiers entre eux, alors $S(mn) = S(m)S(n)$.