DM n°3
A rendre le lundi 6 janvier

Exercice 1 : Variation de la constante en dimension 2

On cherche à résoudre l'équation différentielle à valeurs dans $\mathbb{R}$ suivante sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$: $(E): y'' + 4y = \tan(t)$

1) Résoudre l'équation homogène. On ne donnera que les solutions à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose dans toute la suite :

$$y_1 : \begin{cases} \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto \cos(2t) \end{cases} \text{ et } y_2 : \begin{cases} \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto \sin(2t) \end{cases}$$

2) a) Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \left(\mathcal{C}^1\left(\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right)\right)^2$. On cherche à trouver une solution particulière à (E) qui vérifie la relation :

$$\begin{cases} y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \\ y' = \lambda_1 y_1' + \lambda_2 y_2' \end{cases}$$

Montrer si y est solution de (E) et vérifie la relation précédente, on a alors :

$$\begin{cases} \lambda_1' y_1 + \lambda_2' y_2 = 0 \\ \lambda_1' y_1' + \lambda_2' y_2' = \tan(t) \end{cases}$$

b) En déduire que :

$$\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, \begin{cases} \lambda_1'(t) = -\sin^2(t) \\ \lambda_2'(t) = \frac{1}{2}\cos(2t)\tan(t) \end{cases}$$

c) En déduire toutes les solutions de (E).

3) Résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' + 4y = \tan(t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Problème 1 : Intégrale de Wallis

Pour ce devoir maison, on rappelle la propriété suivante vue en terminale (rappelée au DS n°2 et que nous reverrons cette année au second semestre) :

Propriété : Soient a et b deux réels. Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle [a ;b]. On a alors :

$$\forall\, x \in [a;b], f(x) \geq g(x) \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

Le but de ce problème est de démontrer que :

$$\lim_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Dans toute la suite de ce problème on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

Partie A : Converge de la suite (S_n)

1) Démontrer que la suite (S_n) est croissante.

2) On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

a) Exprimer v_n en fonction de n.

b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n \leq 2$$

c) Démontrer que la suite (S_n) converge.

On pose dans toute la suite de ce problème la suite (W_n) définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\, dt$$

Remarque : Ces intégrales s'appellent les intégrales de Wallis.

Partie B : Une formule explicite des intégrales de Wallis

1) a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$$

2) On pose la suite :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = (n+1) W_{n+1} W_n$$

Démontrer que la suite (u_n) est constante.

4) a) Démontrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$$

b) Déterminer une expression de W_{2n+1} en fonction de n.

Partie C : La limite des intégrales de Wallis

1) Démontrer que la suite (W_n) est décroissante.
(On s'aidera de la propriété rappelée ci-dessus).

2) a) Démontrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, 1 \leq \frac{W_n}{W_{n+1}} \leq \frac{n+2}{n+1}$$

b) En déduire :

$$\lim \frac{W_{2n}}{W_{2n+1}} = 1$$

c) En déduire la formule de Wallis :

$$\lim \frac{1}{n} \times \frac{\left(2^n (n!)\right)^4}{(2n!)^2} = \pi$$

Partie D : La limite de la suite S_n

Dans toute cette partie on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n}(t)\, dt \text{ et } u_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} K_n$$

1) a) A l'aide d'intégrations par parties successives, exprimer W_{2n} à l'aide de K_n et de K_{n-1}.

b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{\pi}{4n^2} = u_{n-1} - u_n$$

c) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \frac{\pi^2}{6} - \frac{4}{\pi} u_n$$

2) a) Montrer que :

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \sin(x)$$

b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq K_n \leq \frac{\pi^2}{4} (W_{2n} - W_{2n+2})$$

c) En déduire que :

$$\lim_n u_n = 0$$

d) Conclure.