Programme de Colle n°13
(Du 6 au 10 janvier 2025)

Equation différentielle

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
b) Équations différentielles linéaires du premier ordre	
Équation différentielle linéaire du premier ordre $$y' + a(x)y = b(x)$$ où a et b sont des fonctions réelles ou complexes définies et continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.	Équation homogène associée. Cas particulier où la fonction a est constante.
Ensemble des solutions de l'équation homogène.	
Principe de superposition.	
Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.	
Méthode de la variation de la constante.	
Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	

c) Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants	
Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants $$y'' + ay' + by = f(x)$$ où a et b sont des scalaires et f est une fonction réelle ou complexe, définie et continue sur un intervalle.	Équation homogène associée.
Ensemble des solutions de l'équation homogène.	Si a et b sont réels, description des solutions réelles.
Principe de superposition.	
Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.	Les étudiants doivent savoir déterminer une solution particulière dans le cas d'un second membre polynôme, de la forme $x \mapsto Ae^{\lambda x}$ avec $(A, \lambda) \in \mathbb{C}^2$, $x \mapsto B\cos(\omega x)$ et $x \mapsto B\sin(\omega x)$ avec $(B, \omega) \in \mathbb{R}^2$.
Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	La démonstration de ce résultat est hors programme.

Arithmétique

c) Ensembles de nombres usuels	
Entiers naturels, entiers relatifs, divisibilité dans $\mathbb{Z}$, diviseurs, multiples.	
Théorème de la division euclidienne.	
PGCD de deux entiers relatifs dont l'un au moins est non nul.	Le PGCD de a et b est défini comme étant le plus grand élément (pour l'ordre naturel dans $\mathbb{Z}$) de l'ensemble des diviseurs communs à a et b.
PPCM.	
Algorithme d'Euclide.	

Remarque : Aucun exercice n'a encore été fait sur l'arithmétique. Ne soyez pas surpris par l'attendu des colleurs ou le manque d'automatisme des élèves.
Beau début d'année à tous.

Questions de cours

Propriété I.b.1 : Soit $a \in \mathcal{C}^0(I)$. Les solutions de $(E_0): y' + ay = 0$ sont :
$$f : t \longmapsto \lambda e^{-A(t)}$$
Où A est une primitive de a sur I.

Propriété I.1 : On a les inclusions strictes suivantes :

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{D} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$$

Propriété III.b.1 (Lemme d´Euclide) : Soient a et b deux entiers non nuls. On pose la division euclidienne de a par b : a=bq+r. Alors on a :

$$a \wedge b = b \wedge r$$

Exercices du type

Application II.b.4 : Résoudre : $y' + y = 4\mathrm{ch}(t)$

Exemple III.a.2 : Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$(E): 2y'' + 2y' - 12y = 4 \qquad (E): y'' - 4y' + 4y = t^2 - 8t + 1$$

$$(E_2): y'' - 4y' + 4y = (t+3)e^{2t}$$

Exercice A.4 : Soit $(a_0; a_1; \dots; a_n) \in [\![0; 9]\!]^{n+1}$. On pose :

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_0} = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots + a_1 \times 10 + a_0$$

Démontrer que :

$$3 | \overline{a_n a_{n-1} \dots a_0} \Leftrightarrow 3 | \sum_{k=0}^{n} a_k$$