Correction DM n°3, PCSI 2024-2025

Exercice 1 : Variation de la constante en dimension 2

On cherche à résoudre l'équation différentielle à valeurs dans $\mathbb{R}$ suivante sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$: $(E): y'' + 4y = \tan(t)$

1) Résoudre l'équation homogène. On ne donnera que les solutions à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose dans toute la suite :

$$y_1: \begin{cases} \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto \cos(2t) \end{cases} \text{ et } y_2: \begin{cases} \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto \sin(2t) \end{cases}$$

2) a) Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \left(\mathcal{C}^1\left(\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right)\right)^2$. On cherche à trouver une solution particulière à (E) qui vérifie la relation :

$$\begin{cases} y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \\ y' = \lambda_1 y_1' + \lambda_2 y_2' \end{cases}$$

Montrer si y est solution de (E) et vérifie la relation précédente, on a alors :

$$\begin{cases} \lambda_1' y_1 + \lambda_2' y_2 = 0 \\ \lambda_1' y_1' + \lambda_2' y_2' = \tan(t) \end{cases}$$

b) En déduire que :

$$\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, \begin{cases} \lambda_1'(t) = -\sin^2(t) \\ \lambda_2'(t) = \frac{1}{2}\cos(2t)\tan(t) \end{cases}$$

c) En déduire toutes les solutions de (E).

3) Résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' + 4y = \tan(t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

1) On sait que :

$$\mathbf{y'' + 4y = 0 \Leftrightarrow \exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, y(t) = A\cos(2t) + B\sin(2t)}$$

2) a) On sait que :

$$y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \Longrightarrow y' = \lambda_1 y_1' + \lambda_2 y_2' + \lambda_1' y_1 + \lambda_2' y_2$$

On en déduit donc que :

$$\begin{cases} y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \\ y' = \lambda_1 y_1' + \lambda_2 y_2' \end{cases} \Longrightarrow \lambda_1' y_1 + \lambda_2' y_2 = 0$$

De plus si y est solution de (E) on a alors :

$$y'' + 4y = \tan(t)$$

De plus on a :

$$y' = \lambda_1 y_1' + \lambda_2 y_2' \Longrightarrow y'' = \lambda_1' y_1' + \lambda_2' y_2' + \lambda_1 y_1'' + \lambda_2 y_2''$$

On en déduit donc que :

$$y'' + 4y = \tan(t) \Longrightarrow \lambda_1' y_1' + \lambda_2' y_2' + \lambda_1 y_1'' + \lambda_2 y_2'' + 4(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \tan(t)$$
$$\Longrightarrow \lambda_1' y_1' + \lambda_2' y_2' + \lambda_1(y_1'' + 4y_1) + \lambda_2(y_2'' + 4y_2) = \tan(t)$$

De plus on sait que y_1 et y_2 sont solutions de l'équation homogène donc :

$$y_1'' + 4y_1 = 0 = y_2'' + 4y_2$$

On en déduit donc que :

$$\lambda_1' y_1' + \lambda_2' y_2' = \tan(t)$$

On en déduit donc que y est solution de (E) et vérifie la relation précédente, on a alors :

$$\mathbf{\begin{cases} \lambda_1' y_1 + \lambda_2' y_2 = 0 \\ \lambda_1' y_1' + \lambda_2' y_2' = \tan(t) \end{cases}}$$

b) On sait d'après la question précédente que :

$$\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, \begin{cases} \lambda_1'(t)\cos(2t) + \lambda_2'(t)\sin(2t) = 0 \\ -2\lambda_1'(t)\sin(2t) + 2\lambda_2'(t)\cos(2t) = \tan(t) \end{cases}$$

On sait que ce système admet une unique solution si et seulement si :

$$2\cos^2(2t) + 2\sin^2(2t) \neq 0$$

Or on sait que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, 2\cos^2(2t) + 2\sin^2(2t) = 1$$

On en déduit donc que le système admet une unique solution, donné par :

$$\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, \begin{cases} \lambda_1'(t) = -\dfrac{\sin(2t)\tan(t)}{2} \\ \lambda_2'(t) = \dfrac{\cos(2t)\tan(t)}{2} \end{cases}$$

Or on sait que :

$$\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, \sin(2t) = 2\cos(t)\sin(t) \Longrightarrow -\frac{\sin(2t)\tan(t)}{2} = -\sin^2(t)$$

On en déduit donc que :

$$\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, \begin{cases} \lambda_1'(t) = -\dfrac{\sin(2t)\tan(t)}{2} \\ \lambda_2'(t) = \dfrac{\cos(2t)\tan(t)}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \forall t \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, \begin{cases} \lambda_1'(t) = -\sin^2(t) \\ \lambda_2'(t) = \dfrac{1}{2}\cos(2t)\tan(t) \end{cases}$$

On sait que :

$$\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, \lambda_1'(t) = -\sin^2(t) = -\left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)^2 = \frac{1}{2}(\cos(2t) - 1)$$

$$\boldsymbol{\Longrightarrow \exists c \in \mathbb{R}, \forall t \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, \lambda_1(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(2t)}{2} - t\right) + c}$$

De plus on a :

$$\lambda_2'(t) = \frac{1}{2}\cos(2t)\tan(t) = \frac{1}{2}(2\cos^2(t) - 1)\tan(t) = \cos(t)\sin(t) - \frac{\frac{1}{2}\sin(t)}{\cos(t)} = \frac{1}{2}\sin(2t) - \frac{1}{2}\frac{\sin(t)}{\cos(t)}$$

On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{\exists d \in \mathbb{R}, \forall t \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, \lambda_2(t) = -\frac{1}{4}\cos(2t) + \frac{1}{2}\ln(\cos(t)) + d}$$

On pose :

$$f: \begin{cases} \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(2t)}{2} - t\right)\cos(2t)\right) + \left(-\frac{1}{4}\cos(2t) + \frac{1}{2}\ln(\cos(t))\right)\sin(2t) \end{cases}$$

On vérifie alors facilement que :

$$\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, f''(t) + 4f(t) = tan(t)$$

Donc f est une solution particulière de (E).
On en déduit donc que :

$$\begin{cases} y'' + 4y = \tan(t) \\ t \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$$

$$\boldsymbol{\Leftrightarrow \exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, y(t) = \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(2t)}{2} - t + A\right)\cos(2t)\right) + \left(-\frac{1}{4}\cos(2t) + \frac{1}{2}\ln(\cos(t)) + B\right)\sin(2t)}$$

3) En reprenant les notations de la question précédente on a :

$$y(0) = A = 0$$

De plus on a :

$$y'(0) = \left(-\frac{1}{4} + B\right)2 = 1 \Longrightarrow B = \frac{3}{4}$$

On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{\begin{cases} y'' + 4y = \tan(t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}}$$

$$\boldsymbol{\Leftrightarrow \forall t \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, y(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(2t)}{2} - t\right)\cos(2t) + \left(-\frac{1}{4}\cos(2t) + \frac{1}{2}\ln(\cos(t)) + \frac{3}{4}\right)\sin(2t)}$$

$$= -\frac{1}{2}t\cos(2t) + \left(\frac{1}{2}\ln(\cos(t)) + \frac{3}{4}\right)\sin(2t)$$

Problème 1 : Intégrale de Wallis

Le but de ce problème est de démontrer que :

$$\lim_{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Dans toute la suite de ce problème on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

Partie A : Converge de la suite (S_n)

1) Démontrer que la suite (S_n) est croissante.

2) On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

a) Exprimer v_n en fonction de n.

b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n \leq 2$$

c) Démontrer que la suite (S_n) converge.

On pose dans toute la suite de ce problème la suite (W_n) définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\, dt$$

Remarque : Ces intégrales s'appellent les intégrales de Wallis.

Partie B : Une formule explicite des intégrales de Wallis

1) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$$

2) On pose la suite :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = (n+1)W_{n+1}W_n$$

Démontrer que la suite (u_n) est constante.

3) a) Démontrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$$

b) Déterminer une expression de W_{2n+1} en fonction de n.

Partie C : La limite des intégrales de Wallis

1) Démontrer que la suite (W_n) est décroissante.

2) a) Démontrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, 1 \leq \frac{W_n}{W_{n+1}} \leq \frac{n+2}{n+1}$$

b) En déduire :

$$\lim \frac{W_{2n}}{W_{2n+1}} = 1$$

c) En déduire la formule de Wallis :

$$\lim \frac{1}{n} \times \frac{\left(2^n (n!)\right)^4}{(2n!)^2} = \pi$$

Partie D : La limite de la suite S_n

Dans toute cette partie on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n}(t)\, dt \text{ et } u_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} K_n$$

1) a) A l'aide d'intégrations par parties successives, exprimer W_{2n} à l'aide de K_n et de K_{n-1}.

b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{\pi}{4n^2} = u_{n-1} - u_n$$

c) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \frac{\pi^2}{6} - \frac{4}{\pi} u_n$$

2) a) Montrer que :

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \sin(x)$$

b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq K_n \leq \frac{\pi^2}{4} (W_{2n} - W_{2n+2})$$

c) En déduire que :

$$\lim_n u_n = 0$$

d) Conclure.

Problème 1 : Intégrale de Wallis

Le but de ce problème est de démontrer que :

$$\lim_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Dans toute la suite de ce problème on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

Partie A : Converge de la suite (S_n)

1) On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$$

On en déduit donc que la suite (S_n) est croissante.

2) a) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1) - k}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

b) On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![1; n]\!], k^2 \geq k(k-1)$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2, \forall k \in [\![2; n]\!], \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$$

$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2, \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$$

$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$$

$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)}$$

$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + 1 - \frac{1}{n}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n \leq 2$$

c) Il suffit de voir que la suite (S_n) est croissante et majorée.

Partie B : Une formule explicite des intégrales de Wallis

1) On a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2}(t)\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos^{n+1}(t)}_{u(t)} \underbrace{\cos(t)}_{v'(t)}\, dt$$

On pose :

$$\begin{cases} u(t) = \cos^{n+1}(t) \\ v'(t) = \cos(t) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(t) = (n+1)(-\sin(t))\cos^n(t) \\ v(t) = \sin(t) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = \underbrace{\left[\cos^{n+1}(t) \times \sin(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)(-\sin(t))\cos^n(t)\sin(t)\, dt$$

$$= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\cos^n(t)\, dt$$

$$= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2(t))\cos^n(t)\, dt$$

$$\Longrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}$$

$$\boldsymbol{\Longrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n}$$

2) On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n \Longrightarrow u_{n+1} = (n+2)W_{n+2}W_{n+1} = \boldsymbol{(n+1)W_{n+1}W_n = u_n}$$

Ainsi la suite **(u_n) est constante**.

3) On veut démontrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$$

Méthode 1 : Par récurrence :

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_n = "W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}"$$

Initialisation :

$$\frac{(0)!}{2^0(0!)^2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}=W_0$$

Donc P_0 est vraie.
Hérédité : Sit n un entier naturel fixé. On suppose vraie P_n.
On a :

$$W_{2n}=\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\times\frac{\pi}{2}$$

Or on sait que :

$$\forall\, n\in\mathbb{N}, W_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}W_n$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
W_{2(n+1)} = W_{2n+2} &= \frac{2n+1}{2n+2}W_{2n}\\
&= \frac{2n+1}{2n+2}\times\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\times\frac{\pi}{2}\\
&= \frac{1}{2(n+1)}\times\frac{(2n+1)!}{2^{2n}(n!)^2}\times\frac{\pi}{2}\\
&= \frac{2(n+1)}{2^2(n+1)(n+1)}\times\frac{(2n+1)!}{2^{2n}(n!)^2}\times\frac{\pi}{2}\\
&= \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}((n+1)!)^2}\times\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Donc P_{n+1} est vraie.
Conclusion : P_0 vraie et P_n héréditaire implique par le principe de récurrence que P_n est vraie pour tout entier naturel n :

$$\boldsymbol{\forall\, n\in\mathbb{N}, W_{2n}=\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\times\frac{\pi}{2}}$$

Méthode 2 : Par itération de la formule de récurrence :
On sait que :

$$\forall\, n\in\mathbb{N}, W_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}W_n$$

Ainsi on a :

$$\begin{aligned}
\forall\, n\in\mathbb{N}, W_{2n} &= \frac{2n-1}{2n}W_{2n-2}\\
&= \frac{2n-1}{2n}\times\frac{2n-3}{2n-2}W_{2n-4}\\
&= \frac{2n-1}{2n}\times\frac{2n-3}{2n-2}\times\frac{2n-5}{2n-4}W_{2n-6}\\
&\vdots\ \text{On réitère le procédé n fois}\\
&= \frac{2n-1}{2n}\times\frac{2n-3}{2n-2}\times\ldots\times\frac{1}{2}W_0
\end{aligned}$$

Or on sait que :

$$W_0=\frac{\pi}{2}$$

De plus on a :

$$\begin{aligned}
\frac{2n-1}{2n}\times\frac{2n-3}{2n-2}\times\ldots\times\frac{1}{2} &= \frac{(2n-1)\times(2n-3)\times\ldots\times3\times1}{2n\times(2n-2)\ldots\times2}\\
&= \frac{(2n-1)\times(2n-3)\times\ldots\times3\times1}{2^n n\times(n-1)\times\ldots\times1}\\
&= \frac{(2n-1)\times(2n-3)\times\ldots\times3\times1}{2^n n!}\\
&= \frac{2n(2n-1)\times(2n-2)\times(2n-3)\times\ldots\times3\times2\times1}{2^n n!\times2n\times(2n-2)\ldots\times2}
\end{aligned}$$

$$= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

On a donc :

$$\forall\, \mathbf{n} \in \mathbb{N}, \mathbf{W_{2n}} = \frac{\mathbf{(2n)!}}{\mathbf{2^{2n}(n!)^2}} \times \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}$$

b) C'est la même chose que la question a précédente, soit par récurrence ou par itération de la formule de récurrence. Comme on ne nous donne pas de formule à démontrer, nous allons le faire grâce à la méthode 2.

Méthode 2 : Par itération de la formule de récurrence :

On sait que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$$

Ainsi on a :

$$\begin{aligned}\forall\, n \in \mathbb{N}, W_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1} W_{2n-1}\\ &= \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2n-2}{2n-1} W_{2n-3}\\ &= \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2n-2}{2n-1} \times \frac{2n-4}{2n-3} W_{2n-5}\\ &\vdots \text{ On réitère le procédé n fois}\\ &= \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2n-2}{2n-1} \times \ldots \times \frac{2}{3} W_1\end{aligned}$$

Or on sait que :

$$W_1 = 1$$

De plus on a :

$$\begin{aligned}\frac{2n}{2n+1} \times \frac{2n-2}{2n-1} \times \ldots \times \frac{2}{3} &= \frac{2^n n!}{(2n+1) \times (2n-1) \ldots \times 3}\\ &= \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}\end{aligned}$$

$$\forall\, \mathbf{n} \in \mathbb{N}, \mathbf{W_{2n+1}} = \frac{\mathbf{(2^n n!)^2}}{\mathbf{(2n+1)!}} = \frac{\mathbf{2^{2n}(n!)^2}}{\mathbf{(2n+1)!}}$$

Partie C : La limite des intégrales de Wallis

1) On sait que :

$$\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], 0 \leq \cos(t) \leq 1$$

$$\Longrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}, \forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], 0 \leq \cos^{n+1}(t) \leq \cos^n(t)$$

$$\Longrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}, \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0 \, dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(t)\, dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\, dt$$

$$\Longrightarrow \forall\, \mathbf{n} \in \mathbb{N}, \mathbf{0} \leq \mathbf{W_{n+1}} \leq \mathbf{W_n}$$

2) a) On sait que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, W_{n+1} \leq W_n \leq W_{n-1}$$

$$\Longrightarrow 1 \leq \frac{W_n}{W_{n+1}} \leq \frac{W_{n-1}}{W_{n+1}}$$

Or on sait que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$$

On a donc :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, W_{n+1} = \frac{n}{n+1} W_{n-1}$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \frac{W_{n-1}}{W_{n+1}} = \frac{n+1}{n}$$

On a donc :

$$\boldsymbol{\forall\, n \in \mathbb{N}, 1 \leq \frac{W_n}{W_{n+1}} \leq \frac{n+1}{n}}$$

b) On sait que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, W_{2n+1} \leq W_{2n} \leq W_{2n-1}$$
$$\Longrightarrow 1 \leq \frac{W_{2n}}{W_{2n+1}} \leq \frac{W_{2n-1}}{W_{2n+1}}$$

Or on sait que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$$

On a donc :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, W_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} W_{2n-1}$$
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \frac{W_{2n-1}}{W_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n}$$

On a donc :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, 1 \leq \frac{W_{2n}}{W_{2n+1}} \leq \frac{2n+1}{2n}$$

De plus on sait que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{2n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{2n}}{1} = 1$$

D’après le théorème des gendarmes :

$$\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} \frac{W_{2n}}{W_{2n+1}} = 1}$$

c) On sait que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2} \text{ et } W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

On en déduit donc que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \frac{W_{2n}}{W_{2n+1}} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2} \times \frac{(2n+1)!}{2^{2n}(n!)^2}$$
$$= (2n+1)\frac{\pi}{2} \times \frac{\big((2n)!\big)^2}{\big(2^n(n!)\big)^4}$$

On a donc :

$$\lim_{n\to+\infty} (2n+1)\frac{\pi}{2} \times \frac{\big((2n)!\big)^2}{\big(2^n(n!)\big)^4} = 1$$
$$\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \left(n+\frac{1}{2}\right) \times\times \frac{\big((2n)!\big)^2}{\big(2^n(n!)\big)^4} = \frac{1}{\pi}$$
$$\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+\frac{1}{2}} \times \frac{\big(2^n(n!)\big)^4}{(2n!)^2} = \pi$$
$$\boldsymbol{\Longrightarrow \lim \frac{1}{n} \times \frac{\big(2^n(n!)\big)^4}{(2n!)^2} = \pi}$$

Partie D : La limite de la suite S_n

Dans toute cette partie on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n}(t)\, dt \text{ et } u_n = \frac{4^n(n!)^2}{(2n)!} K_n$$

1) a) On sait que :

$$W_{2n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\times\cos^{2n}(t)\,dt=\underbrace{[t\times\cos^{2n}(t)]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0}+2n\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\times\sin(t)\times\cos^{2n}(t)\,dt=2n\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\times\sin(t)\times\cos^{2n-1}(t)\,dt$$

De plus on sait que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\times\sin(t)\times\cos^{2n-1}(t)\,dt$$

$$=\underbrace{\left[\frac{t^2}{2}\times\sin(t)\times\cos^{2n-1}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t^2}{2}\times\left(\cos(t)\times\cos^{2n-1}(t)-(2n-1)\sin^2(t)\cos^{2n-2}(t)\right)dt$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\cos^{2n}(t)\,dt+\frac{2n-1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\left(1-\cos^2(t)\right)\cos^{2n-2}(t)\,dt$$

$$=-\frac{1}{2}K_n+\frac{2n-1}{2}K_{n-1}-\frac{2n-1}{2}K_n$$

$$=-nK_n+\frac{2n-1}{2}K_{n-1}$$

On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{\forall n\in\mathbb{N}^*, W_{2n}=-2n^2K_n+n(2n-1)K_{n-1}}$$

b) De plus on sait que :

$$\forall n\in\mathbb{N}, W_{2n}=\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\times\frac{\pi}{2}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n\in\mathbb{N}, -2n^2K_n+n(2n-1)K_{n-1}=\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\times\frac{\pi}{2}$$

$$\Longrightarrow -2n^2K_n\times\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}+n(2n-1)\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}K_{n-1}=\frac{\pi}{2}$$

$$\Longrightarrow -2n^2u_n+\frac{n(2n-1)4n^2}{(2n)(2n-1)}\times\frac{4^{n-1}\left((n-1)!\right)^2}{(2n-2)!}K_{n-1}=\frac{\pi}{2}$$

$$\Longrightarrow 2n^2(u_{n-1}-u_n)=\frac{\pi}{2}$$

$$\boldsymbol{\Longrightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*, \frac{\pi}{4n^2}=u_{n-1}-u_n}$$

c) On a :

$$\forall n\in\mathbb{N}, S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{4}{\pi}(u_{k-1}-u_k)=\frac{4}{\pi}\times(u_0-u_n)$$

Or on sait que :

$$u_0=K_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2dt=\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^3}{24}$$

On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{\forall n\in\mathbb{N}, S_n=\frac{4}{\pi}\times\left(\frac{\pi^3}{24}-u_n\right)=\frac{\pi^2}{6}-\frac{4}{\pi}u_n}$$

2) a) Montrons que (cf ex B1 du TD 4) :

$$\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right], \frac{2}{\pi}x\le\sin(x)$$

On pose :

$$f:\begin{cases}\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\frac{2}{\pi}x-\sin(x)\end{cases}$$

On sait que f est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et :

$$\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right], f'(x)=\frac{2}{\pi}-\cos(x)$$

De plus on sait que :

- cos est continue
- cos est strictement décroissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$
- $\cos(0)=1$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

Donc d'après le théorème de la bijection (ou théorème des valeurs intermédiaires), pour tout $y\in[0;1]$, il existe un unique $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ telle que $\cos(x)=y$.

Or on sait que :

$$0<\frac{2}{\pi}<1$$

On en déduit donc qu'il existe un unique $\alpha\in]0;1[$ tel que $\cos(\alpha)=\frac{2}{\pi}$

On a donc le tableau de variation suivant :

x	0		α		$\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}-\cos(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$		$\nearrow$	0

On en déduit donc que :

$$\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right], \frac{2}{\pi}x-\sin(x)\leq 0$$

On en déduit donc que :

$$\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right], \frac{2}{\pi}x\leq\sin(x)$$

On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right], 0\leq x\leq\frac{\pi}{2}\sin(x)}$$

b) On sait d'après la question précédente que :

$$\forall t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right], 0\leq t\leq\frac{\pi}{2}\sin(t)$$

$$\Rightarrow 0\leq t^2\leq\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\sin^2(t)\ \text{ car } x\mapsto x^2 \text{ est croissante sur } \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}0dt\leq\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2\cos^{2n}(t)\,dt\leq\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\sin^2(t)\cos^{2n}(t)\,dt\ \text{ (par croissance de l'intégrale)}$$

$$\Rightarrow 0\leq K_n\leq\frac{\pi^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2(t))\cos^{2n}(t)\,dt$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow\forall n\in\mathbb{N}, 0\leq K_n\leq\frac{\pi^2}{4}(W_{2n}-W_{2n+2})}$$

c) On sait que :

$$\forall n\in\mathbb{N}, 0\leq K_n\leq\frac{\pi^2}{4}(W_{2n}-W_{2n+2})$$

On sait de plus que :

$$W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \frac{4^n(n!)^2}{(2n)!} K_n \leq \frac{4^n(n!)^2}{(2n)!} \times \frac{\pi^2}{4}\left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2} - \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}\left((n+1)!\right)^2} \times \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq \frac{\pi^3}{8}\left(1 - \frac{\left(2n+2)(2n+1)\right)}{4(n+1)^2}\right)$$

$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq \frac{\pi^3}{8}\left(1 - \frac{2n+1}{2(n+1)}\right)$$

Or on sait que :

$$\lim_n \frac{2n+1}{2(n+1)} = 1$$

On en déduit donc que :

$$\lim_n \frac{\pi^3}{8}\left(1 - \frac{2n+1}{2(n+1)}\right) = 0$$

On en déduit donc d'après le théorème des gendarmes que :

$$\boldsymbol{\lim_n u_n = 0}$$

d) On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \frac{\pi^2}{6} - \frac{4}{\pi} u_n$$

D'après la question précédente on en déduit donc que :

$$\boldsymbol{\lim_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}}$$